

OBZORY

2/2021 (50)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2021 ročník 50

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 2/2021 Volume 50

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Zná m, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)
Daniel K l u v a n e c (Physics)

International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
A b a T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
	Tomáš Lengyelfalusi	Martin Papčo	

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	Mária Rakovská

O paradoxu dvojčat

Michal Křížek

Abstract [On the twin paradox]: First we present several illustrative examples of the classical twin paradox, since there are still many doubts and conjectures about it. Further, we show that time in a gravitational field on the surface of a spherically symmetric mass body flows as quickly as the proper time of a clock moving by the corresponding second cosmic speed.

Key words: Lorentz transformation, inertial systems, time dilatation, relativistic Doppler effect.

Souhrn: Nejprve představíme několik ilustrativních příkladů klasického paradoxu dvojčat, protože o něm koluje stále mnoho pochybností a nejasností. Dále ukážeme, že čas v gravitačním poli na povrchu hmotného sféricky symetrického tělesa plyne stejně rychle jako vlastní čas hodin pohybujících se příslušnou 2. kosmickou rychlostí rychlostí.

Klíčová slova: Lorentzova transformace, inerciální soustava, dilatace času, relativistický Dopplerův jev.

MESC: M50

1 Úvod

Toto pojednání je volným pokračováním článku [4], kde jsme se snažili upozornit na některé paradoxní jevy způsobené Dopplerovým jevem, které souvisí s kontrakcí délek a dilatací času ve speciální teorii relativity. Nyní se ještě zaměříme na známý paradox dvojčat. Nejprve si ale ve stručnosti připomeňme, že pohyby těles v inerciální soustavě S musí splňovat první Newtonův zákon setrvačnosti. V S zavedeme pravoúhlé souřadnice x, y, z a definujeme rovnoměrně plynoucí časovou souřadnici $t \in (-\infty, \infty)$. Tj. ve všech bodech prostoru máme hypotetické hodiny ukazující v daném okamžiku stejný čas.

Nechť S' je další inerciální soustava s pravoúhlými souřadnicemi x', y', z' , které jsou pro jednoduchost rovnoběžné s osami x, y, z (viz obr. 1) a v klidu mají všechny osy stejné měřítko [14]. Čas $t' \in (-\infty, \infty)$ v S' se opět zavádí pomocí soustavy synchronizovaných hodin, jež jsou vůči S' v klidu. Pro jednoduchost předpokládejme, že počátek S' se pohybuje podél osy x konstantní rychlostí $v \in (-c, c)$, přitom pro

$v > 0$ se bude pohybovat v kladném směru osy x a pro $v < 0$ v záporném směru osy x . Zde c je rychlost světla ve vakuu, která je stejná ve všech inerciálních soustavách. Dále definujeme *Lorentzův faktor* známým vztahem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1. \quad (1)$$

Všimněme si, že $(v/c)^2 + (1/\gamma)^2 = 1$ splňuje rovnici jednotkové kružnice.

Body prostoročasu R^4 nazveme *události*. Pro jednoduchost se omezíme na případ, kdy událost odpovídající střetu počátků S a S' definuje počátek odpočtu času v obou soustavách, tj. $t = 0$ v S a $t' = 0$ v S' . V tomto speciálním případě má *Lorentzova transformace* tvar

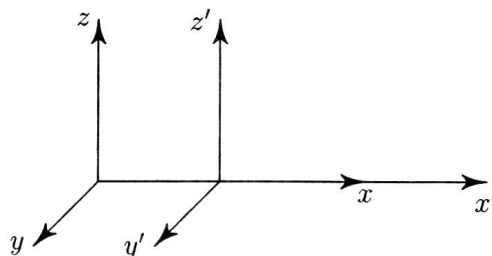
$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2)$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad (3)$$

kde $x, y, z, t \in (-\infty, \infty)$.



Obrázek 1. Inerciální soustava S' se pohybuje rychlostí $v \in (-c, c)$ vzhledem k nehybné soustavě S .

Uvažujme pevný časový interval

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 > 0,$$

kde t'_i jsou prostorově nezávislé časové souřadnice v S' . Pro libovolný pevný bod x na ose x v S definujme odpovídající časy t_2 a t_1 pomocí vztahu (3),

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x\right), \quad t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x\right)$$

a položíme $\Delta t = t_2 - t_1$. Odtud pak plyne známý vztah pro *dilataci času* [2],

$$\Delta t' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x - t_1 + \frac{v}{c^2}x) = \gamma\Delta t. \quad (4)$$

Z (1) je patrné, že platí $\Delta t' > \Delta t$ pro každé $v \neq 0$ nezávisle na znaménku v . Vztah (4) vlastně vyjadřuje, že vlastní čas hodin v pohybující se soustavě S' plyne pomaleji než čas na hodinách, které jsou v klidu vzhledem k S . Hodiny v klidu tedy tikají nejrychleji.

2 Paradox dvojčat

V řadě publikací [3], [5, p. 167], [6], [13]... se paradox dvojčat (angl. též the clock paradox) formuluje pomocí dilatace času takto:

Jedno dvojče Adam zůstane na Zemi, zatímco druhé dvojče Bob poletí konstantní relativistickou rychlostí v ke hvězdě Sírui vzdálené 8 ly (světelných let, angl. light year). Podle Adama bude Bobův čas plynout pomaleji v důsledku dilatace času a také Bobova vzdálenost k Sírui bude kratší než 8 ly díky kontrakci délek. Po otočce u Siria Bob změní inerciální soustavu a vrátí se rychlostí $(-v)$. Po návratu na Zemi dvojčata zjistí, že Adam je starší než jeho bratr Bob. Podívejme se nyní na paradox dvojčat podrobněji.

Paradox dvojčat je vlastně paradoxem relativnosti současnosti. Nejprve stručně rozebereme několik nesprávných řešení paradoxu dvojčat, která kolují v laické veřejnosti nebo je lze najít na internetu.¹ Často se například tvrdí, že Bob se vrátí stejně starý jako Adam. Bobovi se totiž jeví, že on sám je v klidu a že se naopak Adam pohybuje, a tak Adamovi plyne čas pomaleji v důsledku dilatace času (4). Tato symetrie platí pro všechny inerciální soustavy. Musíme si ale uvědomit, že Bob u Siria změnil inerciální soustavu, a tak úloha není symetrická vzhledem k oběma dvojčatům. Proto předchozí tvrzení není správné.

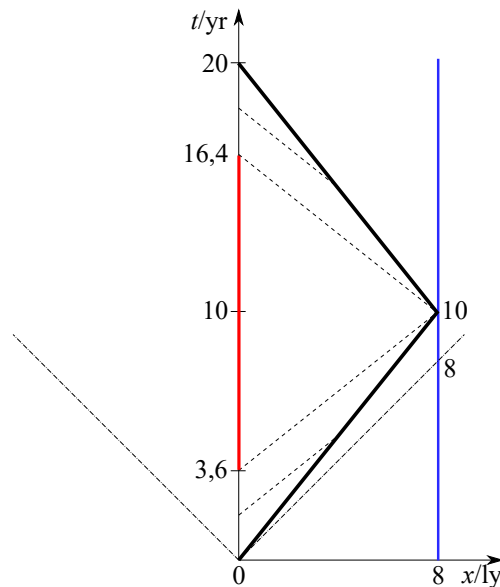
Jiné nesprávné řešení poukazuje na to, že Adam pozoruje nejprve červený posuv vzdalujícího se Boba v důsledku Dopplerova jevu [1], tj. Adamovi se jeví, že Bobovy hodiny jdou pomaleji. Po Bobově otočce u Siria bude Adam pozorovat modrý posuv. Oba jevy se tak vykompenzují a oba bratři se opět setkají stejně staří. V následující kapitole uvidíme, že ani toto zdůvodnění není správné, protože je třeba vzít v úvahu dilataci času (4). Podrobný rozbor Dopplerova jevu ve speciální teorii relativity uvádíme v [4] (viz též [7]).

¹<https://fikacek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=454179>, www.wikina.cz/a/Paradox_dvojcat

Uvedme si ještě třetí nesprávné řešení. Abychom byli konkrétní, předpokládejme, že

$$v = 0,8c$$

je rychlost inerciální soustavy Boba S' ve směru osy x vzhledem k nehybné soustavě Adama S . Pro jednoduchost budeme měřit čas v rocích a vzdálenosti ve světelných rocích. Pak bude rychlost světla rovna $c = 1$ ly/yr a podle Adamových hodin Bob doletí k Siriu během 10 let a stejnou dobu poletí zpět, tj. dohromady 20 let. První část Bobovy trajektorie v prostoročasu je dána rovnicí $x' = 0$ v S' , která podle (2) přejde na tvar $ct = \frac{5}{4}x$ v S – viz dolní tlustá čára na obr. 2 nazývaná světočára. Její druhá horní polovina, která odpovídá inerciálnímu systému S'' o rychlosti $(-v)$, je dána rovnicí $x'' = 0$, tj. $ct = 20 \text{ ly} - \frac{5}{4}x$.



Obrázek 2. Na svislé ose t je čas v rocích, zatímco na vodorovné ose x je vzdálenost ve světelných rocích. Levá svislá přímka je světočára Adama, který zůstává na Zemi. Pravá svislá přímka odpovídá světočáře Siria. Světočára letícího Boba je znázorněna tlustou po částech lineární čarou. Čerchovaně je budoucí světelný kužel $ct = |x|$. Čárkované úsečky označují současné události, kde t' v S' a t'' v S'' jsou konstantní, např. $ct = \frac{4}{5}x + 3,6 \text{ ly}$.

Nyní se falešně argumentuje tím, že Bob při změně inerciální soustavy pocítí nekonečné zrychlení² během otočky u Siria a že to je hlavní důvod paradoxu dvojčat. To ovšem není pravda, protože když Bob dosáhne Siria, může vyslat informaci (např. fotografii) o svém skutečném stáří v soustavě S' jinému cestovateli, který právě míjí Sirius směrem k Zemi v soustavě S'' o rychlosti $(-v)$. Totéž lze uskutečnit i při Bobově startu ze Země a jeho návratu zpět. Navíc se tvrdí, že Bob při změně inerciální soustavy bude pozorovat skok v čase na Zemi (viz obr. 2). To také není pravda, jak ukážeme v následující kapitole (viz též [10]). Skok ale bude v pozorovaných frekvencích. Pod *pozorováním* zde rozumíme skutečné pozorování, nikoli rekonstrukci dějů, tedy rekonstrukci dějů „co bylo s čím současné“ z pohledu cestujícího Boba před otočkou a po otočce. Taková rekonstrukce právě poukazuje na zmíněnou podstatu relativnosti současnosti. Zájemce o tuto problematiku odkazujeme na článek [10] či na stránky [www.cpp.edu/~sim\\$ajm/materials/twinparadox.html](http://www.cpp.edu/~sim$ajm/materials/twinparadox.html).

3 Jednoduché řešení paradoxu dvojčat

Než si představíme správné řešení paradoxu dvojčat, dokážeme následující větu.

Věta 3.1

Rozdíl $(ct)^2 - x^2$ je invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci.

Důkaz. Z (2)–(3) a (1) pro rozdíl čtverců dostáváme

$$\begin{aligned} (ct')^2 - x'^2 &= (ct' - x')(ct' + x') \\ &= \gamma\left(ct - \frac{vx}{c} - x + vt\right)\gamma\left(ct - \frac{vx}{c} + x - vt\right) \\ &= \gamma^2\left(1 + \frac{v}{c}\right)(ct - x)\left(1 - \frac{v}{c}\right)(ct + x) = (ct)^2 - x^2, \end{aligned} \quad (5)$$

což se mělo dokázat. □

Položme opět

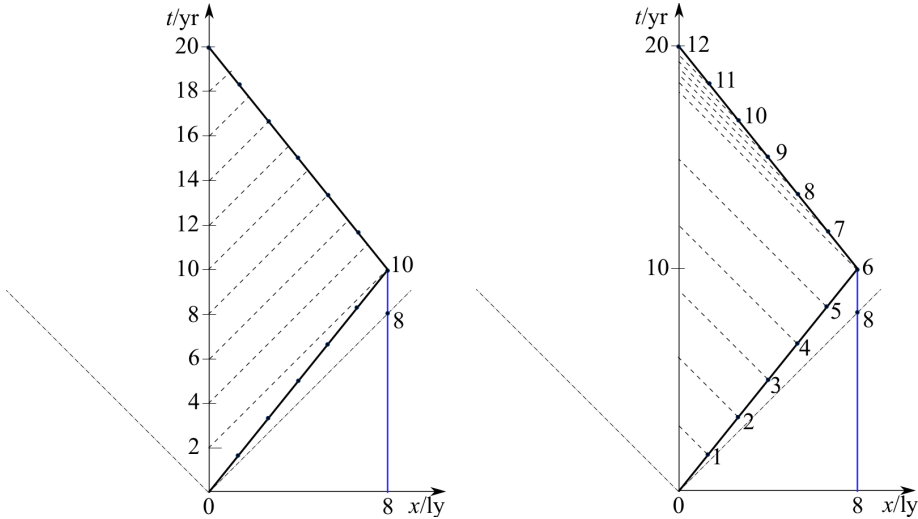
$$v = 0,8c.$$

(Pro obecné $v \in (-c, c)$ lze postupovat zcela analogicky.) Protože Bob je v klidu v soustavě S' , platí $x' = 0$. Pro $\Delta t = 10$ yr a $\Delta x = 8$ ly z (5) dostaneme

$$c\Delta t' = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \sqrt{100 - 64} \text{ ly} = 6 \text{ ly}.$$

²Roger Penrose [8, p. 421] zakulacuje Bobovu světočáru v blízkosti startu, otočky a přistání, aby se vyhnul nekonečným zrychlením.

Bob tedy poletí k Siriu jen 6 roků vzhledem k jeho vlastnímu času (viz černé puntíky na světočáře Boba na obr. 3). Jeho hodiny budou u Siria ukazovat 6 let. Bob po otočce bude cestovat zpět na Zemi rychlostí $(-v)$ opět 6 let vůči jeho vlastnímu času. Při příletu tedy bude o $20 - 2 \times 6 = 8$ mladší než jeho dvojče Adam.



Obrázek 3. Značení je stejné jako v obr. 2 kromě čárkovaných úseček, které zde označují trajektorie fotonů vysílaných pravidelně Adamem a Bobem. Vlevo: Adam posílá pravidelně signál Bobovi. Vpravo: Bob posílá pravidelně signál Adamovi. Je patrné, že ani Adam, ani Bob nebudou pozorovat skok v čase ale skok v přijímaných frekvencích.

Podívejme se ještě, jak se mění frekvence přijímaných signálů. Dopplerův jev, který není zahrnut ve vztazích (2)–(3), nelze při pozorování odstranit. Označme f_0 klidovou frekvenci stejných hodin Adama a Boba. Jestliže se Bob vzdaluje od Adama rychlostí v , pak podle relativistického Dopplerova jevu bude Adam v S detekovat frekvenci (viz [2, 4]),

$$f_v = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f_0. \quad (6)$$

Dosažením za $v = 0,8c$ zjistíme, že Adam bude pozorovat 3krát nižší frekvenci Bobových hodin, jelikož

$$\frac{f_v}{f_0} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \frac{1}{3}.$$

Podobně zjistíme, že po otočce Boba bude Adam přijímat frekvenci

$$f_v = 3f_0,$$

viz obr. 3. Přitom Bob bude přijímat stejné frekvence od Adama díky principu relativity. Během své cesty bude Bob pozorovat všechny časové děje na Zemi, i když s jinou frekvencí. Žádný časový interval tedy nebude přeskočen (srov. obr. 2 a 3).

Příklad 3.2

Pro jednoduchost předpokládejme, že Niel Armstrong letěl k Měsíci a zpět konstantní rychlostí $v = 10 \text{ km/s}$ a že $\Delta x = 384\,000 \text{ km}$ je vzdálenost k Měsíci. *O kolik sekund se vrátil mladší, když se vrátil z Měsíce?*

Řešení. Armstrongův jednosměrný let trval

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = 38\,400 \text{ s} \quad (7)$$

vzhledem k hodinám na Zemi. Pak podle (6) dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{c^2}} = \sqrt{38\,400^2 - 1,28^2} = \sqrt{1\,474\,559\,998,3616} \\ &= 38\,399,999\,978\,666 \text{ s.} \end{aligned}$$

Odtud a ze vztahu (7) obdržíme

$$\Delta t - \Delta t' = 0,000\,021\,344 \text{ s.}$$

Pro zpáteční cestu dostaneme stejnou hodnotu. Podle speciální teorie relativity se tedy Armstrong vrátil z Měsíce o $43 \mu\text{s}$ mladší, než kdyby zůstal na Zemi.

4 Vliv gravitačního pole na chod času

Podle obecné teorie relativity jdou hodiny na zemském povrchu pomaleji než u Měsíce. Položme si podobnou otázku jako v příkladu 1. Nyní ale zahrneme rozdílnou rychlost plynutí času na Zemi a mimo ni. Dále pro jednoduchost budeme předpokládat nulovou gravitaci mimo Zemi, tj. zanedbáme i gravitační pole Měsíce.

Příklad 4.1

Vrátil se Niel Armstrong z Měsíce mladší, než kdyby zůstal na Zemi?

Řešení. Pro vysílanou (emitovanou) frekvenci f_{em} v gravitačním poli a detekovanou frekvenci f v nulové gravitaci platí relativistický vztah (viz např. [11, s. 261])

$$f = f_{\text{em}} \sqrt{1 - \frac{r}{R}}, \quad (8)$$

kam dosadíme za $R = 6373$ km střední poloměr Země a za $r = 2GM/c^2 = 8,87$ mm Schwarzschildův poloměr Země, kde $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta a $M = 5,972 \times 10^{24}$ kg hmotnost Země. Odtud dostaneme, že

$$\frac{f}{f_{\text{em}}} = 1 - 6,5 \times 10^{-10}.$$

Podle (7) se hodiny na Zemi za čas $2\Delta t = 76\,800$ s opozdí o

$$2\Delta t \left(1 - \frac{f}{f_{\text{em}}}\right) = 50 \mu\text{s}.$$

Porovnáním s příkladem 1 zjistíme, že se Niel Armstrong vrátil dokonce starší, než kdyby zůstal na Zemi. V tomto případě se tedy efekty speciální a obecné teorie relativity vzájemně odečítají podobně jako při přesném nastavení GPS, viz [9].

Příklad 4.2

Albert Einstein si kdysi kladl otázku: *Jdou hodiny na rovníku rychleji než hodiny na pólu?* Tuto úlohu lze řešit analogicky jako příklad 2, proto se omezíme jen na hlavní body. Rovníkový poloměr Země je $R_1 = 6\,378\,135$ m a polární $R_2 = 6\,356\,750$ m. Předpokládejme, že hodiny na pólu mají frekvenci $f = 1 \text{ s}^{-1}$. Hodiny na rovníku se zřejmě pohybují rychlostí $v = 2\pi R_1/T = 465,1$ m/s, kde $T = 86\,164,1$ s je délka siderického dne. Přitom na krátkém časovém intervalu jde téměř o inerciální soustavu. Pro frekvenci f' odpovídající f podle (4) je $f' = \gamma^{-1}f$, a tedy pro rozdíl těchto frekvencí podle (1) platí

$$f - f' = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) f = 1,2 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}.$$

Pomocí vztahu (8) je frekvence \tilde{f} hodin na rovníku o poloměru R_1 , které se ale s ním nepohybují, o

$$\tilde{f} - f = 2,3 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

vyšší, než je frekvence f hodin na pólu vzdálených R_2 od středu Země. V tomto případě obecná teorie relativity opět způsobuje větší efekt než dilatace času.

Na závěr si ještě položíme otázku: *Pro jakou rychlost v se dilatace času (daleko od všech gravitačních vlivů) vyrovnává se zpomaleným chodem hodin v gravitačním poli nějakého tělesa, např. Země, Marsu či Jupitera?* Odpověď na ni dává následující věta.

Věta 4.3

Čas na povrchu sféricky symetrického tělesa T o hmotnosti M a poloměru R plyne stejně rychle jako vlastní čas pozorovatele (daleko od všech gravitačních vlivů) pohybujícího se vůči tělesu T druhou kosmickou rychlostí $v = \sqrt{2GM/R}$.

Důkaz. Podle dilatace času (4) poměr odpovídajících frekvencí splňuje rovnost $f'/f = \gamma^{-1}$. Pomocí vztahů (1) a (8) tedy požadujeme, aby

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{r}{R}}.$$

Tudíž platí, že

$$v^2 = \frac{rc^2}{R} = \frac{2GM}{R}.$$

K vyrovnání chodu vlastních časů tedy dochází pro rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Tento vztah je ovšem známá 2. kosmická rychlost nutná k opuštění gravitačního pole daného tělesa. \square

V knize [12, Sect. 3.5] se podrobně rozebírá, co znamená 2. kosmická rychlost v obecné teorii relativity.

L i t e r a t u r a – R e f e r e n c e s

- [1] Doppler, Ch.: Ueber das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels. Abh. böhm. Ges. Wiss. **2** (1842), 466–482.
- [2] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. der Phys. **322** (10) (1905), 891–921.
- [3] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sand, M.: The Feynman lectures of physics I. Addison-Wesley Publ. Company, 1966.
- [4] Křížek, M.: O paradoxech ve speciální teorii relativity. Obzory mat. fyz. inf. **49** (2020), č. 1, 31–40.
- [5] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: Gravitation, 20th edition. W. H. Freeman, New York, 1997.
- [6] Mixson, J. S.: The twin paradox of special relativity is solved. Infinity Publishing, 2014.
- [7] Moriconi, M.: Special theory of relativity through the Doppler effect. Eur. J. Phys. **27** (2006), 1409–1424.
- [8] Penrose, R.: The road to reality. Vintage Books, London, 2005.

- [9] Ryston, M.: Obecná teorie relativity pro středoškoláky – třetí část: Dilatace času a GPS. Čs. čas. fyz. 70 (2020), 254–257.
- [10] Sikora, P.: The twin paradox in a Loedel diagram. Eur. J. Phys. 39 (2018), 045707.
- [11] Šolc, M. a kol.: Fyzika hvězd a vesmíru. SPN, Praha, 1983.
- [12] Taylor, E. F., Wheeler, J. A.: Exploring black holes – Introduction to general relativity. Addison Wesley, San Francisco, 2000.
- [13] Taylor, E. F., Wheeler, J. A.: Fyzika priestoročasu – úvod do špeciálnej teórie relativity. Enigma, Nitra, 2012.
- [14] Ženíšek, A.: Relativita do kapsy. Masarykova univ., Brno, 2015.

Poděkování: Autor děkuje prof. Alexandru Ženíškovi a neznámému recenzentovi za inspiraci a cenné připomínky a dále Haně Bílkové za nakreslení obrázků. Podpořeno RVO 67985840.

Adresa autora:

Matematický ústav, Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1
e-mail: krizek@math.cas.cz

Generating melodies with respect to a chord progression

Roman Klivanec

Abstract: The aim of this article is to introduce an experimental method of generating simple lead melodies with the respect to chord progression of songs using curve fitting and interpolation.

Key words: music, melody, composition, interpolation

Súhrn: Cieľom článku je predstaviť experimentálny spôsob generovania jednoduchých melódií „rešpektujúcich“ akordové sekvencie piesní prostredníctvom aproximácie kriviek a interpolácie.

Kľúčové slová: hudba, melódia, komponovanie, interpolácia

MESC: M50

Introduction

When it comes to creativity, there are two distinct types: the flash out of the blue (inspiration? genius?), and the process of incremental revisions (hard work). Not only are we years away from modelling the former, but we also do not even begin to understand it. The latter is algorithmic in nature and has been modelled in many systems both musical and non-musical [1].

Generally, when provided with an accompaniment, only people with musical talent and education can compose melodies that fit the background. There are some algorithms that try to achieve a similar output; however, these often face a lot of problems, e.g. they require a dataset of existing melodies and songs of an enormous size, or they are lacking the extended options for configuration such as a musical genre or a length of a song [2].

There is, however, a lot of knowledge about what musical features create consonance, i.e. songs that have a pleasant sound. It can help us to reduce the problem of algorithmic composition into a simpler task — instead of trying to generate every possible melody that “sounds good”, one could try to generate a subset of melodies that use the known features with pleasant sound and are prone to “sound good”.

1 State of the art

A research has been conducted to discover the most common features of melodies. If we were able to replicate these common features in the process of musical synthesis, the new melodies would likely be consonant and resemble popular music of present times.

Melody can be defined as a rhythmically organized sequence of single tones so related to one another as to make up a particular phrase or idea [3]. Chords in the *harmonies* are chosen for their colour and sense of direction relative to each other and are spaced so that a desired succession of tones (the melody) lays on top. A melodic line has several key characteristics, mainly contour, range, and scale [4].

When generating a vocal melody, the vocalist range needs to be considered. It is defined as the upper and lower limit of the tones used. To simplify the music generation, the new approach only uses Soprano range for the female voices (C4–C6) and Tenor for the male voices (C3–C5).

Presumably, a melody’s fittingness with an internal *scale* schema – the ease with which it is assimilated to this schema – affects how “good” it sounds. Specifically, diatonic scales include a reasonably large number of pitch classes (seven) while minimizing the occurrence of semitone intervals – the major diatonic scale (do-re-mi-fa-so-la-ti-do) follows an interval 2-2-1-2-2-2-1 containing only two one-semitone intervals [5]. Using a major diatonic scale therefore seems like a reasonable choice.

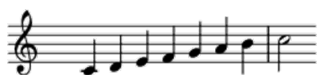


Figure 1. Diatonic Scale

The term *contour* is used to refer to the shape of a melody over time - whether the notes rise to higher pitches, fall to lower ones, remain at the same pitch, or some combination of these. Additionally, contours are used to discuss whether a melody moves by adjacent notes or by larger intervals [6].

In the book *Making Music: 74 Creative Strategies for Electronic Music Producers* ([6]), the author discusses a set of three general rules for melodic contours that cause the melodies to sound pleasant and interesting:

- Good melodies have a strong sense of balance between both aspects of contour: rise vs. fall and conjunct motion vs. disjunct motion, for example, if a melody rises for a while, it might make sense for it to then fall by roughly the same amount.
- If a melody has moved by step for a while, a good choice might be to then proceed by leap in the opposite direction. Commonly, a melody that has moved by leap will then move by step in the opposite direction.

- Good melodies often have a single peak note. That is, the highest pitch in the melody occurs only once.

To simulate the *melody-harmony relationship*, a concept of Melodic anchoring has been used [7]. Stable tones are the notes of the tonic triad - a group of three notes: the key note plus the 3rd and 5th degrees above it. They are said to be stable because when they are played in a key environment, their sound reposes in the harmony. Unstable tones are the tones of the scale that are not stable.

Unstable tones in a tonal context demand resolution to stable pitch neighbours. The stable tones serve to anchor unstable tones in their pitch neighbourhood. An enduring characteristic of tonal music is that unstable tones behave in highly predictable ways. They seek resolution to stable tones that are proximal in pitch. In Western music, this is typified by the voice leading from one chord to the next, as in the movement of the leading tone to the tonic or the subdominant to the mediant in a chord progression.

This way, the melody contour can be imagined as a curve fitted to a series of anchor (stable) tones. The rest of the tones are then defined by the melody contour. The implementation of the generation algorithm in this article generates the anchor tones randomly and later tries to interpolate the melody curve based on these points and various approaches to interpolation.

Figure 2. *Let it be* by The Beatles — The concept of melodic anchoring

2 Implementation

To implement the suggested approach to generating melody contours, they are represented in a digital form as a 2D curve with two axes – time and tone. The melody is based on a set of randomly generated anchor (stable) tones and the rest of the melody curve is then interpolated. With interpolation we seek a function that allows us to approximate such that functional values (notes) between the original data set values may be determined [9].

In this approach, a different methods of curve fitting are used to interpolate the missing tones. These methods are later evaluated against each other to determine which interpolation has a best resemblance of human melody composition.

The simplest type of interpolation is *linear* (point-to-point) interpolation, which simply connects each data point with a straight line. This way, linear melody contours are generated between the anchor tones.



Figure 3. Example of a linear interpolation on a melody with 4 anchor tones

In real songs, the melody is usually not moving linearly, but the dynamics of the motion are smoother. A good idea might be to use *cubic-spline interpolation*. An improved interpolation procedure is to replace the straight line connecting the data points with a third-degree polynomial. This smooth behaviour is accomplished by computing the polynomial coefficients for each interval using more than just the adjacent data points (as opposed to linear interpolation which uses just the interval end points to determine the two bounding anchor tones).



Figure 4. Example of a cubic-spline interpolation on a melody with 6 anchor tones

Given the set of anchor tones, we seek a function that has a “best fit” to their set, i.e. the distance of the interpolated contour and the anchor tones is the least possible. When using linear interpolation, the melody only consists of upward (or downward) stepping tones. The project, therefore, implements two versions of the *polynomial interpolation* – 5th degree interpolation and 10th degree interpolation.

Lower degrees would result in a monotone or a very basic melody of upward or downward stepping tones and a higher degree could have an impact of the performance of the algorithm.



Figure 5. Example of a polynomial regression on a melody with 3 anchor tones

3 Evaluation & Conclusion

In the case of automated systems for algorithmic composition intended to reproduce human creativity in some way, there is the problem of evaluating their performance: the concept of artistic creativity eludes a formal, unambiguous and effective definition, which makes it difficult to evaluate these systems in a completely rigorous way [10].

Therefore, a different type of evaluation has been made. Instead of focusing on the overall quality of the generated melodies, two different questions have been asked:

- Are melodies generated by this algorithm distinguishable from melodies composed by people?
- Which interpolation method generates the most pleasant melodies?

The results of the following evaluation should, however, be considered only as the author's perspective on the topic supported by a simple experiment. The goal of the article itself is not to provide factual claims based on statistically significant results, but rather to introduce a new method to be considered.

To evaluate the *distinguishability* of generated songs and composed songs, 3 composers (graduates of music) from the author's peer group have been asked to participate. The goal was to provide test subjects with songs with the same accompaniment and both types of melodies (generated and composed) and have them guess the origin of the melody. All the composers (and the melody generator) have been working with the same three accompaniment tracks – two Pop songs and a Blues song. Each test subject was then given all 7 random variations of each of the 3 songs in a random order and was asked to guess which songs are generated and which are composed.

The results of the survey show that 29,8 % of generated songs have been identified as human-composed melodies. Moreover, the total precision in their identification was 75,6 %, but the recall was only 58,3 %. The high precision suggests that the test subjects are not very likely to identify a composed song as a generated one, thus the composers did a good job. The low recall suggests that there is a wide variety of generated melodies when it comes to the composition quality. Some of the melodies have been very successful in persuading the test subjects, but some have not.

When looking at the accuracy of each of the models, the Linear interpolation has been identified correctly in 49,1 % cases, Cubic Interpolation in 52,6 % cases, 5th degree Polynomial regression in 66,7 % cases and 10th degree Polynomial regression in 64,9 % cases. It seems that linear and cubic interpolations are better at composing melodies than polynomial regression of any degree. Altogether, the generator can generate melodies of high qualities, however, not every melody generated by the generator sounds good and natural.

To evaluate the generators ability to compose melodies using *different types of interpolation*, test subjects have been asked to compare similar songs generated using the same randomisation seeds and a different interpolation type. This way, each type of interpolator has been given the same sets of anchor tones and the resulting melodies are rightfully comparable. The subjects have then been asked to rank the melodies based on the pleasantness of their sound. In total, 12 people have participated in the survey. The total average scores for interpolators were:

- Linear: 2, 23.
- Cubic spline: 1, 63.
- 5th degree polynomial: 3, 44.
- 10th degree polynomial: 2, 71.

The most important thing to notice is that Linear and Cubic spline interpolators did a better job than both polynomial regressions. This is likely caused by a fact that polynomial regression is not an interpolation of a true essence, but rather a curve fitting method. This means that the melodic contour is revolving around the anchor tones, rather than always hitting them. This might cause a slight dissonance within the melody. Example demonstrating this on a set of different curves generated from the same anchor tones can be seen below.

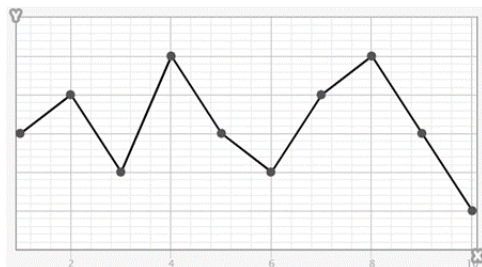


Figure 6. Example of a linear interpolation

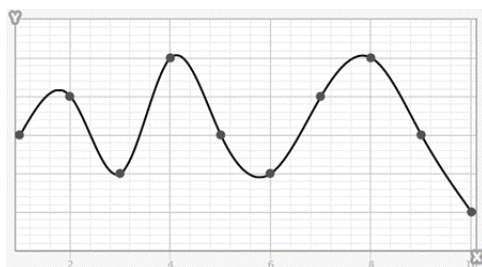


Figure 7. Example of a cubic spline interpolation

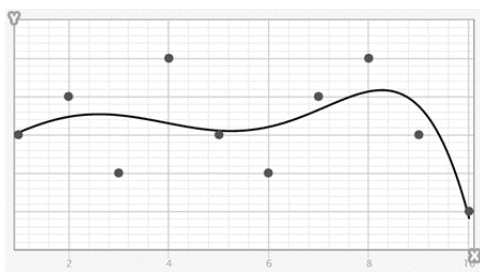


Figure 8. Example of a polynomial regression of a 5th degree

Secondly, a melodic curve generated by a polynomial regression has a limit on number of its monotone segments, i.e. can only raise or fall a limited number of times (based on the degree of the regression). This might cause the melody to sound boring and repetitive (as can be often heard in the case of 5th Polynomial regression, this can also be seen on the examples above).

When comparing the two real interpolators, the cubic spline seems to be the clear winner based on the total average. This is also suggested by the median and modus of these two interpolators, which are both 1 and 2, respectively for the interpolators. The cubic spline interpolator has always achieved a better or equal score as the linear interpolator.

This might have been caused by the fact, that the cubic spline interpolator is creating melodic curves, which are more “creative”, or just more interesting, because of their curvature. Moreover, the cubic spline curve often circles around the anchor tone, going slightly below (or above) it before crossing it. This creates nice melodic decorations.

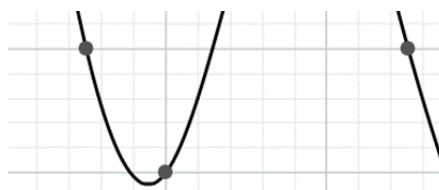


Figure 9. Detail of a cubic spline circling around the anchor point



Figure 10. An example of a melodic decoration when using cubic spline interpolation

Altogether, true interpolators have shown a tendency to be a better fit for the melodic generation, since the output melodies are crossing directly through the anchor tones. When choosing an interpolator, it seems that a better choice is an interpolator that creates melodic curves with more waves and decorations, such as the Cubic spline interpolation.

References

- [1] Bruce, L. J.: *Algorithmic composition as a model of creativity*. Organised Sound, 157–165, 1996.
- [2] Klivanec, R.: *Generating Background Music*, The University of Edinburgh, 2020.
- [3] American Heritage® Dictionary of the English Language, Fifth Edition. S.v. “melody.” www.thefreedictionary.com/melody.
- [4] The Editors of Encyclopædia Britannica. Melody. Encyclopædia Britannica, 2017.
- [5] Bartlett, J. C., Dowling, W. J.: *Scale Structure and Similarity of Melodies*. Music Perception: An Interdisciplinary Journal, vol. 5, no. 3, 285–314, 1988.
- [6] DeSantis, D.: *Creating Melodies 1: Contour*. In Making Music: 74 Creative Strategies for Electronic Music Producers. Ableton, 2015.
- [7] Bharucha, J. J.: *Melodic Anchoring*. Music Perception: An Interdisciplinary Journal, 1996.
- [8] Onyemachi, C.: *Active Tones Vs Stable Tones Of The Major Scale*. www.hearandplay.com/main/active-tones-vs-stable-tones-major-scale.
- [9] Wickert, D. M.: *Interpolation and Curve fitting*. Problem Solving in ECE I(MATLAB). University of Colorado, 2000.
- [10] Fernandez, J. D., Vico, F.: *AI Methods in Algorithmic Composition: A Comprehensive Survey*. Journal Of Artificial Intelligence Research, 513–582, 2013.

Acknowledgement: We present results of the *Generating background music* student project (2018–2019) conducted by Roman Klivanec and supervised by Prof. Paul Anderson at The University of Edinburgh, Scotland, United Kingdom.

Author’s address:

Roman Klivanec, Na strelnici 35, 951 01 Nitrianske Hrnčiarovce
e-mail: roman@klivanec.sk

Zadania úloh

71. ročníka Matematickej olympiády

Kategória A

Úloha A-I-1. (*Tomáš Bárta*) Je možné vyplniť tabuľku $n \times n$ jednotkami a dvojkami tak, aby bol súčet čísel v každom riadku deliteľný piatimi a súčet čísel v každom stĺpci deliteľný siedmimi? Riešte pre prípady

- a) $n = 9$,
- b) $n = 12$.

Úloha A-I-2. (*Patrik Bak*) Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD . Označme k a l kružnice s priermi BC a AD . Ďalej označme P priesečník priamok BC a AD . Dokážte, že dotyčnice z bodu P ku kružnici k zvierajú rovnaký uhol ako dotyčnice z bodu P ku kružnici l .

Úloha A-I-3. (*Patrik Bak*) Nájdite všetky celé čísla n také, že $n > 2$ a číslo n^{n-2} je n -tá mocnina celého čísla.

Úloha A-I-4. (*Tomáš Jurík*) V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}xy + 1 &= z^2, \\yz + 2 &= x^2, \\zx + 3 &= y^2.\end{aligned}$$

Úloha A-I-5. (*Patrik Bak*) Označme I stred kružnice vpísanej do rôznostranného trojuholníka ABC a k kružnicu jemu opísanú. Polpriamky BI a CI pretnú kružnicu k postupne v bodoch S_b a S_c , pričom $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokážte, že dotyčnica ku kružnici k v bode A , priamka vedená bodom I rovnobežne so stranou BC a priamka S_bS_c sa pretínajú v jednom bode.

Úloha A-I-6. (*Martin Melicher, Josef Tkadlec*) Uvažujme nekonečnú postupnosť (a_0, a_1, a_2, \dots) celých čísel takú, že $a_0 \geq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pre všetky nezáporné indexy n . Dokážte, že táto postupnosť obsahuje nekonečne veľa zložených čísel.

Kategória B

Úloha B-I-1. (*Patrik Bak*) Pravoúhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán a obvod 11990. Navyše vieme, že jedna jeho odvesna má prvočíselnú dĺžku. Určte ju.

Úloha B-I-2. (*Patrik Bak, Josef Tkadlec*) Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC . Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F taký bod, že $ABFC$ je rovnobežník. Dokážte, že $|FD| = |FE|$.

Úloha B-I-3. (*Jaroslav Zhouf*) Určte počet deväťmiestnych čísel, v ktorých sa každá z číslic 0 až 9 vyskytuje najviac raz a v ktorých sa súčty číslic na 1. až 3. mieste, na 3. až 5. mieste, na 5. až 7. mieste a na 7. až 9. mieste vždy rovnajú 10. Nájdite aj najmenšie a najväčšie z týchto čísel.

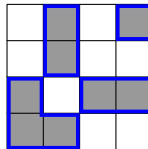
Úloha B-I-4. (*Vojtech Bálint*) Určte počet reálnych koreňov rovnice

$$x \cdot |x + 6p| = 36$$

v závislosti na reálnom parametri p .

Úloha B-I-5. (*Jaroslav Zhouf*) Nech $A_1A_2 \dots A_n$ je pravidelný n -uholník. Bod A_3 zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi A_2A_4 , získame tak bod A'_3 . Potom bod A'_3 zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi A_1A_3 , čím získame bod A''_3 . Pre ktoré n také, že $n \geq 4$, je bod A''_3 totožný s priesečníkom priamok A_1A_2 a A_3A_4 ?

Úloha B-I-6. (*David Hruška*) Je daná šachovnica $m \times n$, ktorej políčka sú ofarbené čiernou a bielou farbou klasickým spôsobom tak, že ľavé horné políčko je čierne. Ťahom rozumieme vzájomnú výmenu dvoch riadkov alebo vzájomnú výmenu dvoch stĺpcov šachovnice. Škvrou rozumieme takú neprázdnu množinu čiernych políčok, ktorá je tvorená všetkými políčkami, do ktorých možno z jedného jej políčka prejsť po ceste pozostávajúcej z čiernych políčok susediacich stranou. Napríklad na obrázku je šachovnica 4×4 s práve štyrmi škvrami. V závislosti na kladných celých číslach m a n určte, koľko najmenej škvŕn môže byť na šachovnici $m \times n$ po vykonaní konečného počtu ťahov.



Kategória C

Úloha C-I-1. (*Josef Tkadlec*) V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žiaci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do päťíc, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šestic. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

Úloha C-I-2. (*Jaroslav Zhouf*) Určte všetky štvorice rôznych dvojmiestnych prirodzených čísel, pre ktoré zároveň platí:

- (i) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 2, je 80.
- (ii) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 3, je 90.
- (iii) Súčet tých čísel z danej štvorice, ktoré obsahujú číslicu 5, je 60.

Úloha C-I-3. (*Jaroslav Zhouf*) Vnútri strany BC trojuholníka ABC sú dané body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, vnútri strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojuholník ohraničený úsečkami AE, GD, BF . Dokážte, že pomer obsahu tohto trojuholníka a obsahu trojuholníka ABC má jedinú možnú hodnotu, a určte ju.

Úloha C-I-4. (*Patrik Bak*) Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je rovný nule a zároveň súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je rovný nule. Určte najväčší možný súčet všetkých čísel v tabuľke.

Úloha C-I-5. (*Jaroslav Švrček*) Je daný rovnostranný trojuholník ABC a vnútri jeho strany AB bod D . Na polpriamke opačnej k BC zostrojme bod E taký, že $|CD| = |DE|$. Dokážte, že platí $|AD| = |BE|$.

Úloha C-I-6. (*Mária Dományová, Patrik Bak*) Určte všetky možné hodnoty súčtu $a + b + c + d$, kde a, b, c, d sú kladné celé čísla spĺňajúce rovnosť

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

Za Slovenskú komisiu Matematickej olympiády spracoval Stanislav Krajčí
e-mail: stanislav.krajci@upjs.sk

Chaos Physics in Secondary School A Material Applicable in Online Teaching

Motto "But if you stir backward, the jam will not come together again."

Tom Stoppard: Arcadia

Ildikó Bajkó

Abstract: Chaotic systems are not only subject for researchers, but we all encounter them in our everyday life, when, e.g., mixing cream in coffee. This paper addresses the issues of teaching chaos physics in high school within both extracurricular framework, and by incorporating it into high school physics curriculum. The teaching material is based on mechanical processes and has been tested in different student groups. The module was specially elaborated to conceptualize some basic aspects of chaos theory, like predictability, chaos, complex and chaotic motions, irreversibility, determinism and mixing. The post-tests, administered to students after completing the module, have shown significantly higher scores on conceptual questions, as compared to the results of the pre-tests, indicating a deeper understanding of the enumerated concepts. The curriculum is suitable for online teaching, too.

Keywords: chaos physics, experiments, high school, curriculum

Súhrn: Chaotické systémy nie sú pozorované výhradne vedcami, stretávame sa s nimi všetci v každodennom živote, napríklad pri miešaní smotany s kávou. Tento príspevok sa venuje problematike výučby fyziky chaosu na strednej škole v mimoškolskom rámci a jej integráciou do učebných osnov fyziky pre stredné školy. Učebný materiál je založený na mechanických procesoch, a bol testovaný v rôznych skupinách žiakov. Modul bol špeciálne rozpracovaný pre pochopenie niektorých základných aspektov teórie chaosu, ako sú predvídateľnosť, chaos, zložité a chaotické pohyby, nezvratnosť, determinizmus a miešanie. Post testy, ktoré žiaci absolvovali po ukončení modulu, preukázali významný nárast skóre v koncepčných otázkach v porovnaní s výsledkami pred testom, čo naznačuje hlbšie pochopenie uvedených koncepcií. Pripravené učebné osnovy sú vhodné aj pre online výučbu.

Kľúčové slová: fyzika chaosu, experimenty, stredná škola, učebné osnovy

MESC: M50

1 Introduction

Chaotic processes can be experienced in almost every branch of science. They are present not only in physical sciences, but also in many other disciplines, ranging

from populations dynamics, via chemical reactions, to cardiac fluctuations. Many books available in the chaos literature give an overview of several chaotic systems [1-4], some others concentrate only on specific fields like, e.g. astronomy [5] or oceanic plankton patterns [6]. Books devoted to artistic aspects of chaos have also been published [7,8], and basic chaos-related ideas appear even in theatre pieces, such as in Tom Stoppard's *Arcadia* [9]. The choice is thus broad, for conceptual clarity, we concentrate on mechanical phenomena, mostly based on materials treated on undergraduate level in the introductory textbook [3]. Because of the nature of chaos however, one can easily connect our examples to other scientific disciplines such as meteorology, astronomy, environmental issues, and even to arts: literature, handicrafts, and visual arts, via the phenomenon of mixing and irreversibility. Our experience shows that the essence of chaos physics can successfully be taught to students of different age, in teaching modules of different lengths.

2 The method

I am reporting about a teaching module I run in the last couple of years for a total of 72 students in their penultimate or last year of high school, in groups of 10-15 on average. These students came from classes specialized in science or math. Most teaching activity took place within extracurricular framework in study groups, but the program has also been incorporated into the standard curriculum by devoting a few hours to it in the Mechanics or Modern Physics chapters. In this latter case, the teaching material was reduced to a 4-5 hours frame. The teaching material I prepared can also be offered as a project work for students, then it is possible to delve deeper into various topics. It worked perfectly at our school's yearly week-long project-based teaching. Moreover, the teaching unit has successfully been applied for the purpose of distance learning in the spring semester 2020 during the online teaching period in Hungary.

Before students heard anything from us about chaotic phenomena, they wrote a pre-test. In the very first lesson of the module, the students become acquainted with simple physical systems that exhibit chaotic behavior: magnetic pendulum, driven pendulum, elastic pendulum, ball bouncing on double slopes. We present here very briefly the devices used by us, most of which can be easily assembled with the tools available in a physics lab. Their detailed description can be found in [3]. Students had time to make the experiments themselves.

Magnetic pendulum

Consider a pendulum, the endpoint of which is a small magnetic body, moving above three identical magnets placed for example at the vertices of a horizontal

equilateral triangle.¹ When the forces between the pendulum bob and the magnets are attracting, the pendulum can come to a halt, pointing towards any of the three magnets. Thus, there are three simple attractors in the system.

The driven pendulum

We examine the case when the suspension point of a pendulum is moved sinusoidally in time along a horizontal line. The pendulum bob is fixed to a very light, thin rod, or we can use a ruler as a physical pendulum. With a sufficiently strong driving, the motion may become chaotic.

Elastic pendulum

Consider a pendulum having its string replaced by a spring of rest length l_0 and natural frequency ω_0 . This can also serve as a model of a ball attached to an elastic cord, called shimmy ball. In contrast to a real shimmy ball, we assume that the cord never loosens.

Ball bouncing between double slopes

A ball is bouncing on two slopes of identical inclination facing each other in a gravitational field. Chaotic behavior arises because after bouncing back from the opposite slope the ball does not necessarily hit its original position. Non-linearity and inherent instability are caused by the breakpoint between the slopes. During this experiment, students' video-record the position of the ball as a function of time and digitalize it with the *Tracker* program. By comparing two time series of nearly identical initial conditions, they are able to witness butterfly effect in their own experiment.



Fig. 1: Simple chaotic tools (from left to right): magnetic pendulum, driven pendulum, elastic pendulum, and ball bouncing on double slope used in the introductory, experimental part of the teaching module (photos taken by the author).

¹One version of the magnetic pendulum can also be ordered online: ROMP (Random Oscillating Magnetic Pendulum), for example at <http://www2.oberlin.edu/physics/catalog/demonstrations/waves/romp.html>

The very important take-home message from this part of the course was that even simple systems can behave unexpectedly in a complex way, a property that can also be used as a definition of chaos [3].

In the subsequent classes/lessons we complemented the study of these simple systems with numerical simulations, using an in-house program written by my colleagues. We also showed that Excel can easily be used to monitor motions in time. For advanced students with special interest in informatics the use of Dynamic Solver was suggested [10].

In parallel with the numerical simulations, we also introduced the concept of the phase space. Phase space refers to the plotting of both the particle's velocity v and its position x on a two-dimensional graph (Figure 2.). One given state of the particle (i.e., pendulum bob or ball in our case) is represented by a single point in the phase space, while the *movement* of the particle by a series of subsequent points. In other words, any real-life movement traces out a path in the phase space that is called trajectory. It is important to emphasize that real-life trajectories (i.e., those that we see in the physical space) are different from the phase space trajectories, so they might have very different shapes. Time does not appear explicitly in the phase space: it is represented solely by arrows pointing along the phase space trajectories to indicate in which direction the given trajectory evolves in time.

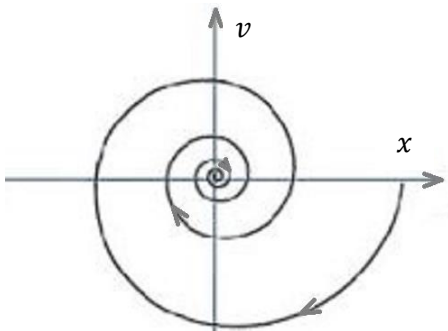


Fig. 2: Example of a (non-chaotic) phase space trajectory showing the possible values of the variable pair: position and velocity, along the motion. (schematic drawing of the author) This phase space trajectory corresponds to a damped oscillation that finally stops at $x = 0$.

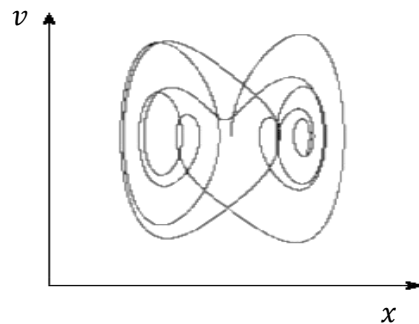


Fig 3: An example of a chaotic phase space trajectory, which is complicated, and resembles an irregular coil (result of a numerical simulation of the author).

Time series belonging to chaotic systems do not exhibit any regularity over arbitrarily long stretches of time. To visualize them, a phase space representation is



Fig. 4: Pattern of a properly sampled long chaotic trajectory, piece of a chaotic attractor (result from a numerical simulation of the author).

particularly useful since it has a finite extension, independent of time. Fig. 3 presents such a chaotic trajectory. The lack of any repetition is clear from the short piece shown here (the trajectory of full length would shade an area of the plane).

It is surprising to see that applying a properly chosen sampling procedure to a long chaotic phase space trajectory, an unusual but well-structured pattern appears. The scientific term for such an object is chaotic attractor. An example is shown in Fig. 4.

The pattern illustrates clearly that chaos is by no mean a complete disorder; it exhibits a strict geometric structure when it is appropriately observed. This is a consequence of the deterministic nature of the dynamics, of Newton's law in mechanical examples. Such complex patterns are examples of fractals [11]. Students may discover that in the case of chaotic systems, a fractal structure always appears in the phase space.

Via the experiments and computer simulations, students can formulate the three most important characteristics of chaos [3]: (i) irregularity of the motion; (ii) unpredictability, i.e., sensitivity to initial conditions; (iii) order, specific geometric pattern, i.e. the appearance of a fractal structure in the phase space. This step-by-step discovery process aroused a great enthusiasm among the students.

We have also discussed the known forms of motions and discovered that the regular periodic motion of a pendulum becomes irregular immediately when placed between the poles of a few magnets. The Earth's orbit around the Sun is periodic, but Pluto's orbit is already chaotic [5].

The world of fractals enchanted the students, thanks also to the beautiful seahorses, whirls, islands and gulfs that appear in Mandelbrot and Julia sets [11]. It is a gratifying feeling that forms that occurs so frequently in nature as e.g., trees or leaves can be described by the language of science [12]. Students were surprised by the fact that mountains and clouds can be generated by computers as fractals. We discussed, however, that the vast majority of fractals is not related to chaos.

3 Basic concepts

In connection with chaos, it is natural to discuss the question of predictability in high schools [3]. Egyptians knew the exact minute of the solar eclipse, but to forecast the weather precisely is a challenge even today. Not only complex phenomena

such as weather forecasting can be problematic, predicting the motion of a magnetic pendulum, or of any chaotic system, is difficult, too.

When experimenting with a magnetic pendulum during the teaching module, we always follow the trajectory of the pendulum two times in succession, starting from a rest state at the same position, as much as possible. Already after a short time, a small difference in the two trajectories can be seen, and after a while the two trajectories become completely different. Examining the trajectories of a driven pendulum, we observe similar features. Some of the students were able to explain this by pointing out that the two starting points were not exactly the same. They also added that in their views, this does not justify such a large difference after a few seconds. Therefore, we verified our experimental observation by computer simulations. We examined the path of a driven pendulum on a computer. The program was run twice with two different starting conditions differing in the fifth decimal digit. We printed out the paths and compared them. The simulation provided quickly divergent orbits, although here we knew exactly how small the difference between the two initial conditions was. It has been proved that, despite knowing the deterministic equations, the motion of the driven pendulum is unpredictable.

The term butterfly effect was mentioned as a synonym of sensitivity to initial conditions, which has gained world fame due to Gleick's book written to popularize chaos [1]. The students agreed that a huge risk of misunderstanding lies in the use of this term, which might suggest a kind of nihilism, when not stating that there are well predictable statements even within chaos (e.g., that the attractor will be reached for sure, and the statistical features of the motion on it can fully be predicted).

The purpose of the last lesson was to synthesize and summarize. In this last hour of the teaching program often a heated discussion arose: if we know the equations of motion, why is it not possible to predict the system's behavior. I was faced in all cases with a very stable deterministic worldview from the part of the students. To weaken it, we have discussed that the nonlinear term (like a quadratic term or sine term) in the system-describing equations of motion is the one that appears to magnify the initially small errors and uncertainties. While for linear equations the error increases at most linearly in time, here it grows exponentially. This is what gives rise to the sensitivity to initial conditions. Then the next question came: why do we talk about chaos – which in its everyday use means disorder - if we know the deterministic equations? There was only one possible answer to this: we must call this phenomenon deterministic chaos. It is exactly the deterministic attributive which tells us, that this is different from disorder. They accepted this explanation. One group even formulated that it was not to promote understanding that this phenomenon was named chaos.

4 The teaching module and its two versions

Tab. 1 shows how our teaching module is structured. Before and after the teaching program, students completed a test so that we could follow the changes in their understanding. In the last session we had a free discussion about the experiences and findings.

Lesson number	Theme	Content, concepts
1.	Filling pre-test	
2	Introduction. Simple mechanical systems with chaotic behavior	Magnetic pendulum. Driven pendulum. Elastic pendulum. Double slope
3-4.	Examples of chaotic motions - Computer simulations	Computer simulations: - motion in real space - parameter settings - sensitivity to initial conditions - phase space - chaotic attractor
5.	Fractals	Fractals in Nature. Mathematical fractals (Cantor set, Cantor filaments, etc.)
6-7.	The Concept of Chaos through experiments: Pendula, bouncing between double slopes	Periodic - Chaotic Motions Linearity - Nonlinearity Predictability - Sensitivity to initial conditions Deterministic Chaos
8.	Is chaos useful?	When is chaos useful? – Mixing Irreversibility Stability-Instability
9.	Repetition. Summary	
10.	Filling a Post-test	
11.	Synthesizing discussion	

Tab. 1: Curriculum for the Chaos Physics teaching module, for study groups

As mentioned before, I also incorporated the program into the standard curriculum, by devoting a few hours to it. To this end, the teaching material was reduced to a 4-5 hours unit. I taught five times in the class, in different school years, for groups of 20-26 students coming from the same age-groups. This was done in the framework of Mechanics, following the chapter Vibrations, Waves. I have told the students that they are essentially learning a new chapter of Modern Physics. We have not entered deeply into simulations here; we have only looked at the characteristics of chaos in connection with simulations taken from the internet. In this version, one has the opportunity to use results obtained by students of earlier study groups, like e.g., their Tracker digitized time series, or video-recorded experiments. I also taught – successfully – this version of the chaos physics curriculum in online teaching with few modifications, in the form of e-learning material.

5 Development of chaos concepts in view of the responses to tests

One recurrent query in the tests is related to the experiments carried out with magnetic pendulum.²

What kind of motion will the magnetic pendulum exhibit in the figure on the left, if it is started with a very small deviation from the middle? (In our set-up the magnets on the table repel the pendulum.) Describe the motion or mark it in the figure! (Fig. 5)

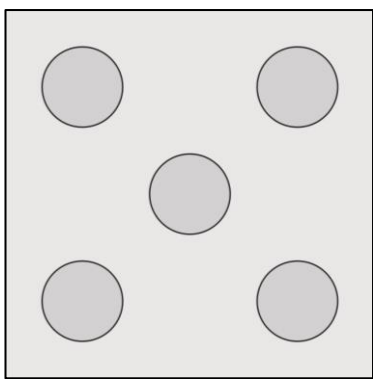


Fig. 5: Image in the test to draw the trajectory of the magnetic pendulum.

Answers to this question are summarized in the following table (this is the average of the tests filled in so far):

	regular motion	irregular (chaotic) motion	Comment
pre-test	67%	33%	
post-test	10%	90%	47% - chaotic motion 33% - irregular motion 10% - sensitive to initial conditions

After completing the teaching module including the experiments, it was accepted by the students of all the different groups that even the motion of systems with a few components can be complicated.

One question from the questionnaire was to find out the interpretation of the concept of chaos

What do you mean by chaos? Explain briefly!

All the students defined chaos in the pre-test according to the everyday vocabulary, as disorder, messy phenomenon, etc. Very few of the students referred to unpredictability too. In the post-test, only about 17% of the respondents identified the concept of chaos exclusively as disorder and confusion. The others have changed their interpretation: 80 % of the responses included unpredictability: from these there were 23% exact definitions, and there were 13 % in which disorder and unpredictability was mentioned together.

The concept of chaos was in focus of another question, too:

² It is worth also discussing with the students this video available on the internet: Magnetic pendulum – Dynamic Geomag <https://www.youtube.com/watch?v=Qe5Enm96MFQ>

Which of the following systems' motion would you call chaotic (multiple answers are allowed):

- a. a very messy room
- b. a poorly organized running race
- c. mixing of paints
- d. weather

The answers to this question are summarized in the following table.

	a	b	c	d
pre-test	50%	53%	33%	33%
post-test	20%	27%	90%	60%

From these answers, there is a clear shift from the everyday concept of chaos to the scientific one. It also reveals that, in very few cases, the two concepts coexist. Thus, almost every student has become acquainted with the concept of deterministic chaos.

6 Focus on mixing and irreversibility

Our teaching material pays special attention to the mixing of liquids because it is in this phenomenon where the appearance of order, a fine geometric structure, can best be captured. Fractal patterns typically occur in chaotic processes in an abstract mathematical space, the phase space, and are thus hidden from direct observation. Mixing is the exception, students were told that in this case the phase space coincides with the real space, so chaos-related fractality can be observed in everyday life: milk or cream mixed into coffee, raspberry syrup poured into milk custard, dirt or stains on the surface of lakes or rivers. In all these cases filamentary structures appear.



Fig. 6: Filamentary pattern on a plasticine stick of two colors (photo taken by the author).

As an introductory remark, we show students that folding and stretching two or three different colored plasticine rods produce a similarly spectacular pattern (Fig. 6).

It also became clear that in relation to dough kneading our grandmothers have long known what science recently formulates: best mixing is provided by the

stretching and folding algorithm. Mixing is most effective when the process is chaotic: so by this example we can discuss one of the useful applications of chaos.

High school students were delighted to create fractal structures on their own. We showed them the "marbling" technique on paper and candle [13]. The beautiful patterns of filamentary fractal structure enchanted them (Fig. 7).



Fig. 7: Patterns of filamentary fractals obtained by marbling technique (photo taken by the author).

The girls were especially enthusiastic when it became clear to them that in addition to a sheet of paper and candles, even aesthetic scarfs can be obtained with this technique. Here again, we had the opportunity to turn back to the patterns occurring in nature: the filamentary patterns resulting from this technique evokes the sight of marble.

Structures like those resulting in marbling activities appear in our environment, for example in the case of the spread of contaminants. Students have the possibility to compare the pattern of their handicraft obtained by marbling and of oil contamination on the surface of water or of foam pollutants before a dam. They thus learn about an important aspect of environmental science: the spreading of pollutants is a chaotic process. The related pattern is not a simple compact patch; rather it always exhibits fractal-like filaments.

I always noticed a smile on the face of the students when they turned to the question "mixing jam in rice pudding". This question touched the notion of irreversibility. Before this question was asked in the post test, during the teaching ma-

terial we always discuss a dialogue from Tom Stoppard’s play *Arcadia* (Stoppard, 1993):

“Thomasina: When you stir your rice pudding, Septimus, the spoonful of jam spreads itself round making red trails like the picture of a meteor in my astronomical atlas. But if you stir backward, the jam will not come together again. Indeed, the pudding does not notice and continues to turn pink just as before. Do you think this is odd?”

Septimus: No.

Thomasina: Well, I do. You cannot stir things apart.”

The full question on this topic was:

Slowly, with a few moves, we mix raspberry jam in rice pudding.

1. If you slowly stir with the same movements backwards, will the raspberry jam return to its original position: a. yes b. no.

2. Is this motion predictable?

The answers are summarized in the following table:

	yes	no	comment
Return to original location?	0	100%	
Is this motion predictable?	57%	43%	One student, who responded no, explained: it would be predictable if the circumstances were perfectly accurate

In summary, the answers show that it is clear for all students that the process is irreversible, even if some of them were not familiar with the scientific meaning of the concept. A related question was also asked on this topic:

Slowly, in a few steps, we mix the raspberry jam into the rice pudding. If you mix it slowly with the same movements backwards, we know that the raspberry jam will not return to its original position. Do you think that chaos has anything to do with the fact that in reality, processes always go in a particular direction (irreversibility)?

The answers to this open question were very scattered, with a total of 77 % thinking that chaos had to do with irreversibility. I would highlight an answer that demonstrates understanding: “Theoretically, if you make the same movement backwards on the same path, the process can be reversed. But this is not possible in practice.”

We intended to capture the students’ understanding of the concept of determinism with the following question:

Which of the following do you think is more characteristic to our world of physical phenomena?

a. a world where laws determine exactly what will happen later, or

b. a world where the existing uncertainties grow, and so probabilistic concepts play an important role.

Again, the answers are summarized in a table:

	deterministic worldview	acceptance of sensitivity to small uncertainties	both options accepted
pre-test	83%	17%	0
post-test	50%	40%	10%

On the one hand, we can see an increase of the acceptance of sensitivity to small deviations, in fact the increase in the acceptance of the role of chance. On the other hand, the coexistence of the two worldviews characterizes 10 % of respondents.

7 Summary

Our experience shows that chaos is exciting even for high school students. The visual and formal possibilities of chaos attract students' attention, help deepen scientific thinking, and awake their creativity. Although we are aware of the challenges the teaching of these phenomena at secondary school level implies, because e.g. the appropriate mathematical apparatus can't be used, we argue that it is very important for students to encounter this subject during their school years, because otherwise the oversimplification of nature's description can deprive students' belief and trust in the power of science. Further advantages of the material are direct connection with multimedia methods (Tracker, Excel, Dynamics Solver), interdisciplinarity (meteorology, astronomy, environmental aspects), and relation to arts (theater piece, handicrafts, painting). These features characterize the material even if applied in online teaching. Therefore, we find worth looking ahead and to cooperate with the teacher community in this matter.

8 Acknowledgements

Useful discussions with I. Benczik and T. Tél are acknowledged. The project is funded by the Content Pedagogy Research Program of the Hungarian Academy of Sciences.

R e f e r e n c e s

- [1] Gleick, J.. *Chaos: The Making of a New Science*, Viking Books, 1987
- [2] Lorenz, E.N.. *The Essence of Chaos*, University of Washington Press, 1993.

- [3] Tél, T., Gruiz, M. . *Chaotic Dynamics, An introduction based on classical mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006
- [4] Argyris, J., Faust, G., Haase, M., Friedrich, R. *An exploration of Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York, 2015.
- [5] Diacu, F., Holmes, Ph.. *Celestial encounters: The Origins of Chaos and Stability*, Princeton Science Library, 1996.
- [6] Neufeld, Z., Hernandez-Garcia, E. *Chemical and biological processes in fluid flows: A dynamical systems approach*, Imperial College Press, London, 2003
- [7] Sprott, J. C., Chapman, R. . *Images of a Complex World: The Art and Poetry of Chaos*, World Scientific, Singapore, 2005.
- [8] Sprott, J.C. . *Elegant Fractals: Automated Generation of Computer Art*, World Scientific, Singapore, 2019
- [9] Stoppard, T.. *Arcadia*, Faber & Faber, 1993
- [10] Csernovszky, Z., Nagy, P., Tasnádi, P., [Investigation of chaos in the absence of programming skill](#), *Canadian Journal of Physics*, 98, (2020), 593-605.
- [11] Mandelbrot, B. . *The Fractal Geometry of Nature*, H. Freeman and Co., 1982
- [12] Vicsek, T.. *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [13] Szatmáry-Bajkó, I.. Handicraft and aesthetic experience in teaching chaos physics, in: A. Király, T. Tél eds., *Teaching Physics Innovatively*, pp. 15-20. ELTE Budapest, 2016.

Authors Address: Ildikó Bajkó, Szent István High School Budapest, 1146 Budapest, Ajtósi Dürer 15
e-mail: bajkoildi@gmail.com

Experimenty s časom – podobné systémy

Boris Lacsny, Aba Teleki

Abstract: Our paper deals with the similarity of physical systems by changing the scaling of basic units. We present two problems in integrating new technologies of the third millennium into education of the third millennium.

Key words: time, experiments, dimensional analysis

Súhrn: Článok sa venuje podobnosti fyzikálnych systémov založenej na fyzikálnych rozmeroch a preškáľovaní základných fyzikálnych jednotiek. Ukazujeme na dvoch zaujímavých problémoch príklad, ako využiť technológie tretieho milénia do vzdelávania.

Kľúčové slová: čas, experimenty, rozmerová analýza

MESC: M50

1. Úvod

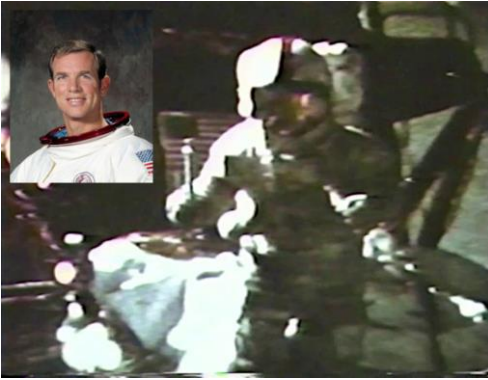
Výzvou pre učiteľov je integrovanie technických prostriedkov tretieho milénia do vyučovacieho procesu tretieho milénia. Jedným z dominantných technických vymožeností sú mobilné komunikačné zariadenia (smartfóny, tablety,...). Tieto zariadenia sú prakticky vykázané z vyučovacieho procesu. Aspoň z vyučovacieho procesu v škole. Sú príliš vyspelé, a ich pomocou sa dajú obísť kontrolné kritériá vymyslené a zabudované do vzdelávacieho procesu za posledných pár storočí. Poslaním týchto *klasických* kontrolných kritérií je definovať podmienky, za ktorých sa jedinec hodnotí. Snaží sa hodnotiť len to, čo jedinec je schopný samostatne. Bude musieť byť cenou tejto paradigmy, že najnovšie technológie vo vzdelávaní nebudú?

Bez revízie spomínaných kontrolných kritérií nebude existovať plnohodnotné vzdelávanie tretieho milénia. Pri hodnotení sa musia dostať do popredia také kritériá, ako: *schopnosť učiť sa z dostupných zdrojov a podnetov, či už jedinca alebo kolektívu. Zmena toho, že čo sa hodnotí³ má priniesť zmenu kontrolných kritérií (čo sa smie používať, ako sa smie používať).*

Mobilné zariadenia, či iné technológie (vrátane webových aplikácií) majú svoje miesto v škole, umožňujú množstvo zmysluplných a motivujúcich použití, ako ukazujú aj nasledujúce príklady.

³ schopnosť učiť sa, schopnosť udržať si svoju motiváciu učiť sa, schopnosť vytrvať pri učení sa celý život;

2. Galileiho experiment na Mesiaci



Obr. 1: Slávny experiment s kladivom a sokolím perom vykonaný na Mesiaci veliteľom Apollo 15 Davidom Scottom (vľavo hore). V priamom prenose ukázal, že Galilei mal pravdu – pokiaľ nemáme odpor prostredia, telesá padajú rovnakým zrýchlením, nezávisle od ich hmotnosti. Ak ich pustíme z rovnakej výšky súčasne, dopadnú na zem (tu na Mesiac) tiež súčasne.

Záber z video záznamu [1] s láskavým súhlasom NASA.

Jedným kandidátom na skúmanie je slávny Galileiho experiment (pozri [1]) vykonaný Davidom Scottom 2-ho augusta 1971⁴, veliteľom Apollo 15. Experiment vykonali v posledný deň, pred návratom na Zem. Experiment vykonali s hliníkovým geologickým kladivom s hmotnosťou 1,32 kg a so sokolím pierkom hmotnosti cca. 3 g.⁵ Obidva predmety boli pustené z výšky približne $h = 1,6$ m (daje z [2]).

Úlohou pre žiakov je, určiť v akej miere (násobný faktor k_t) musíme zábery zhotovené na Mesiaci zrýchliť, aby zodpovedali experimentu na Zemi (v gravitačnom poli Zeme ale tiež vo vákuu)? Musí platiť

$$h = \frac{1}{2} g_M t_M^2 = \frac{1}{2} g_Z t_Z^2, \quad (1)$$

⁴ Vykonanie experimentu na Mesiaci bude sláviť v lete 2021 50-te výročie. David Scott tiež umiestnil pamätnú tabuľu „padlých astronautov“, s menom ôsmich amerických astronautov a šiestich sovietskych kozmonautov, ktorí zomreli počas alebo v príprave vesmírnych programov. Zoznam ale nebol úplný (chýbali mená sovietskych kozmonautov Valentina Bondarenka a Grigorih Neljubova, o ktorých v tú dobu na západe nevedeli a tiež prvý čierny astronaut Robert Henry Lawrence Jr.)

⁵ V správe uvádzaná hmotnosť pierka 0,03 kg je pravdepodobne preklep.

kde t_M je doba, za ktorý predmety dopadli na „zem“ na Mesiaci, kým t_Z je doba, za ktorý by dopadli na zem na Zemi. Zrejme bude $t_M > t_Z$ vďaka nižšej gravitácii na Zemi. Pre potrebný faktor zrýchlenia času k_t máme podľa definície

$$k_T = \frac{t_M}{t_Z} \quad (2)$$

a potom z (1) dostaneme

$$k_T = \sqrt[2]{g_Z/g_m} \approx 2,457. \quad (3)$$

Pokiaľ na video záznamoch budeme mať len pohyby pod vplyvom gravitácie, nie je možné určiť, či zábery boli zosnímané na Mesiaci, alebo na Zemi, a následne boli spomalené faktorom k_t . Z pohľadu rozlúštenia pravosti záberov z Mesiaca je dôležité je slovo „pokiaľ“. Žiaci nájdu množstvo záberov astronautov vykonávajúcich rôzne činnosti na Mesiaci, kde sa prejaví ich svalová sila (potkávajú sa [3], hádžu rôzne predmety, atď.). Ak tieto zábery zrýchlime faktorom $k_T = 2,457$, bude vidieť, že pohyby zo svalovej sily sú výrazne rýchlejšie, než by boli prirodzené na Zemi (teraz zábery prebiehajú tak, akoby boli natáčané na Zemi).

Všetky fyzikálne veličiny, ktoré vo svojom fyzikálnom rozmere majú čas, „zmenia“ svoju hodnotu, keď zmeníme rýchlosť prehrávania. Ak sa zrýchlením zvýši gravitačné zrýchlenie 6-krát, aj gravitačná sila ($F = mg$) sa zvýši 6-krát, a tiež každá sila sa zvýši 6-krát (všetky sily majú rovnaký fyzikálny rozmer $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Vrcholovým športovcom sa občas stane, že vyvinú tak veľkú silu, pri ktorej im prasknú šľachy. Na záberoch astronautov zahadzujúcich na Mesiaci kladivo, či loptu z celej sily, po zrýchlení by sme dostali realitu, pri ktorej astronaut vyvíja 6-krát väčšiu silu. Pri tak veľkej sile by sa trhali šľachy a lámali kosti, na ktoré sú upnuté.

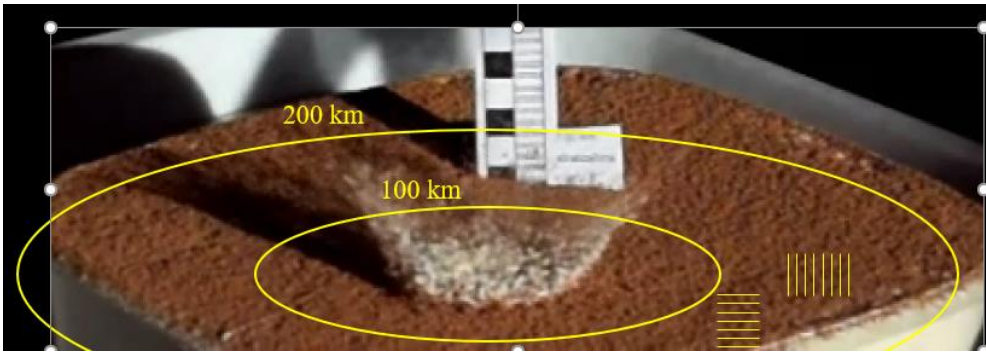
Dnešným vybavením a dostupnými dokumentmi (video zábermi) môžu žiaci hľadať a priamo merať gravitačné zrýchlenie, ktoré pôsobilo na astronautov počas natáčania (napr. z výšky trajektórie a doby letu) – úlohy sú priamo ako tvorené pre prácu s novými technológiami, a prácu v skupine.

Uvedený príklad bol jedným a asi najjednoduchším príkladom ako môžeme interpretovať preškálovanie jednej základnej fyzikálnej veličiny (tu času). Preškálovaním ďalšej základnej fyzikálnej veličiny sa otvára cesta k modelovaniu závažných javov, akým sú dopad asteroidov, či mini planét.

3. Súdny deň pre dinosaury

Zmenou škálovania fyzikálnej jednotky môžeme získať príbuznú fyzikálnu situáciu, v predchádzajúcom prípade reálny pohyb v gravitačnom poli iného telesa.

Zmenou škálovania viacerých jednotiek sa možnosti rozšíria, a umožnia vykonať zaujímavé experimenty pripomínajúce filmové triky veľkých štúdií. V tom pomôžu dnešné mobilné zariadenia so svojim vybavením umožnia zhotoviť video zábery s veľkým rozlíšením a až 120 záberov za sekundu. Ďalším spracovaním vieme zábery ďalej spomaliť, a natočiť napr. modelový dopad asteroidu na Zem.



Obr. 2: Experiment „Asteroid“ demonštrovaný na Vanovičových dňoch (2020). Pôvodný experiment s fotoaparátom 100 záberov za sekundu (v ostrom slnečnom svetle). Dopadajúca guľôčka (asteroid) priemer 10 mm, voľným pádom z výšky cca. 1 m. Modelovaná rýchlosť dopadu cca. 10 km/s, modelovaný priemer asteroidu 34 km. Do video záberu boli dokreslené dodatočne modelové kružnice znázorňujúce mierku, a pomocné rysky pre sledovanie pohybu modelovej „pôdy“, z ktorého sa určilo vodorovné zrýchlenie pôdy po dopade, ako aj rýchlosť pohybu pôdy. Doba letu úlomkov v modelovanom čase 18 min, maximálna vzdialenosť dopadu úlomkov 2800 km. Kôra Zeme modelovaná hladkou múkou, pre názornosť posypaná práškovým kakaom. Plné video dopadu druhého planetoidu na [4].

Zmena škálovania fyzikálnych jednotiek je jednoduchá a dobre pochopiteľná pre každého. Fyzikálne rovnice, vzťahy medzi veličinami sú stále rovnaké: rovnaké v realite a rovnaké v modeli, napr. v miniatúre, líšia sa len tým, že popisujú prírodu na inej škále. Jednotkou času v sústave SI sekunda (s), kým jednotkou dĺžky je meter (m). Pre reálny svet toto označenie ponecháme, ale pre modelový svet zavedieme inú škálu pre čas (s') aj pre vzdialenosti (m'). Skutočnosť, že modelový svet má inú škálu vyjadríme tým, že príslušné jednotky času spája škálovací faktor k_T , a jednotky vzdialenosti spája škálovací faktor k_L , obdobne, ako v prípade skúmania, či pohyby na Mesiaci mohli byť natočené na Zemi

$$s = k_T s' \quad \text{a} \quad m = k_L m'. \quad (4)$$

Ak v našom modeli chceme modelovať korektnu gravitáciu na po vrchu modelovej Zeme, budeme mať $g = 9,81 \text{ m}' \cdot \text{s}'^{-2}$ v škále modelového sveta. Samozrejme, pri natáčaní budeme filmovať guľôčku, ktorá bude padať so zrýchlením $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a dostaneme prvú dôležitú podmienku pre škálovanie

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ teda } k_L k_T^{-2} = 1. \quad (5)$$

Druhú podmienku dostaneme z predpokladu, že asteroid by dopadal rýchlosťou okolo $8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, v modelovom svete rýchlosťou $v = 8 \text{ km}' \cdot \text{s}'^{-1}$. V skutočnosti bude padať guľôčka (modelový asteroid) z určitej vopred vybranej výšky – dajme tomu z výšky 1,0 m, a tesne pred dopadom bude preto mať rýchlosť $v = \sqrt{2gh} = 4,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Odtiaľ

$$v = 8 \text{ km}' \cdot \text{s}'^{-1} = 4,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ teda } k_L k_T^{-1} \approx 1840. \quad (6)$$

Porovnaním (5) a (6) obdržíme obidve škály

$$k_T \approx 1840 \text{ a } k_L = k_T^2 \approx 3,4 \times 10^6. \quad (7)$$

Pomocou škálovacích faktorov k_T a k_L vieme doriešiť otázky spomalenia času (zábery musíme spomaliť 1840-krát). Železná guľôčka s priemerom 10 mm predstavuje asteroid s priemerom 34 km. Ostatné poznatky žiaci vyčítajú z videozáznamu. Otázky môžu byť rozmanité: do akej výšky vyleteli vyvrhnuté úlomky, ako ďaleko doleteli, ako sa pohybovala pôda v okolí dopadu (zrýchlenie, rýchlosť,...). A nie v poslednom rade si môžu (po vhodnom spomalení záberov) pozrieť, ako by to vyzeralo z vesmíru (pozri napr. [4]).

4. Záver

Zažívame pravdepodobne zlatý vek nových technológií, vrátane dostupnosti informácií, ktoré sú z rôznych dôvodov dostupné aj bezplatne, a preto dobre využiteľné vo vzdelávaní. Mal by to byť aj zlatým vekom vzdelávania, čo sa však nestane, pokiaľ sa nezmení definícia, za akých podmienok a aký výkon jedinca bude vzdelávanie sledovať.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

- [1] NASA: Nasa Science – Earth's moon, *The Apollo 15 Hammer-Feather Drop*, publikované 16.07.2018; <https://moon.nasa.gov/resources/331/the-apollo-15-hammer-feather-drop/> (on-line prístup 24.06.2021.)
- [2] NASA: The Apollo 15 Hammer-Feather Drop, https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/apollo_15_feather_drop.html (on-line prístup 24.06.2021.)
- [3] NASA: Astronauti padajúci na Mesiaci <https://www.youtube.com/watch?v=U2rRKRslz8>
- [4] Phys4U: Model dopadu planetoidu. https://youtu.be/IyFzK_nkmuY

Adresa autorov: Boris Lacsný, Phys4U, Schurmannova 27, 949 01 Nitra
e-mail:
 Aba Teleki, Phys4U, Schurmannova 27, 949 01 Nitra,
e-mail: Phys4u.edu@gmail.com

Texty úloh 1. kola 63. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2021-2022) kategórie E, F, G

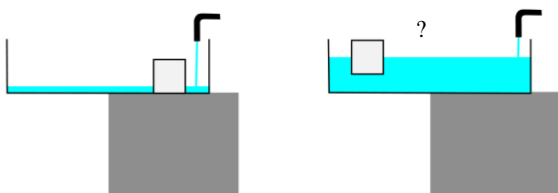
Kategória E

1. Odporový drôt

Drôt s dĺžkou $L = 2,50$ km má elektrický odpor $R = 100 \Omega$.

- Z tohto drôtu potrebujeme odstrihnúť časť s odporom $R_1 = 2,5 \Omega$. Urči dĺžku L_1 časti drôtu, ktorú potrebujeme odstrihnúť.
- Pôvodný drôt dĺžky L rozstrihneme na N_1 rovnakých častí a všetky spojíme paralelne. Urči počet N_1 častí, aby odpor ich paralelného spojenia bol $R_2 = 1,00 \Omega$.
- Pôvodný drôt s dĺžkou L rozrežeme na $N_2 = 25$ rovnakých kusov. Pomocou sériového a paralelného zapojenia skombinujeme všetkých 25 kusov do jedného celku. Aký je najväčší možný elektrický odpor R_{\max} , a aký je najmenší možný elektrický odpor R_{\min} , ktorý takto môžeme vytvoriť použitím všetkých narezaných kusov? Výsledky zdôvodnite a nakresli, alebo popíš príslušné zapojenie.

2. Vanička



Obr. E-1

Na kraj stola bola položená vanička so štvorcovým dnom, ktorého vnútorná hrana mala dĺžku $L = 25,0$ cm. Položili ju tak, že jej dve strany boli rovnobežné s hranou stola, a jej stred bol nad doskou stola tesne pri jej okraji, tak, aby vanička zo stola

nespadla. Aby vaničku zaistili aj inak, zaťažili ju kockou hmotnosti $m = 500$ g (obr. E-1 vľavo). Dĺžka hrany kocky $a = 10$ cm.

Následne začali z kohútika do vaničky pomaly napúšťať vodu s objemovým prietokom $Q = 150$ ml za minútu.

- Urči objem V_1 vody napustenej do vaničky, pri ktorom kocka začala plávať (vyjadri v dm^3).
- Po akom čase t od začatia napúšťania vaničky začala kocka plávať?

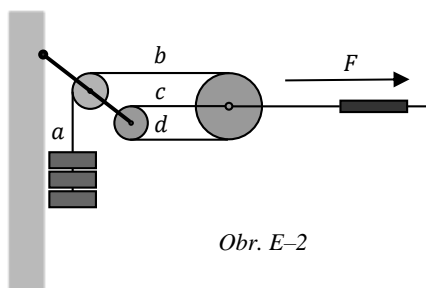
Potom, čo kocka začala plávať, slabý prúd vody ju začal presúvať do druhej polovice vaničky.

- c) Popíš, kde sa bude kocka nachádzať, keď sa vanička prevráti, a či sa vôbec prevráti – svoju odpoveď fyzikálne zdôvodni.

Hustota vody $\rho = 1,00 \text{ g/cm}^3$. Predpokladaj, že keď kocka pláva, jej horná strana je stále vodorovná.

3. Záves elektrického vedenia

Pri elektrickej železničnej trati, aj na železničných staniciach môžeme vidieť zavesenie elektrického vedenia nad traťou. Kým elektrické vedenie sa nachádza nad traťou, z boku (kolmo na trať) je udržiavané lanami so závesmi, aké ukazuje obrázok E–2. Sila F napínajúca lano sa realizuje závažiami zavesenými pomocou trojice kladiek, dvoch menších pevných a jednej väčšej voľnej. Každé z trojice závaží znázornených na obrázku má hmotnosť $m = 80,0 \text{ kg}$.



Obr. E–2

- Urči veľkosti síl, ktorými je napínacie lano napínané v úsekoch, označených na obrázku a , b , c , d .
- Akou veľkou silou F je ťahaný držiak elektrického vedenia nad traťou? Zakreslite sily, ktorými laná pôsobia na najväčšiu kladku.
- Čo je dôvodom takého zdanlivo zložitého zavesenia vodičov – fyzikálne zdôvodni?

Tiažové zrýchlenie $g = 9,81 \text{ N/kg}$. Trenie na kladkách aj v ich osiach je zanedbateľne malé. Hmotnosti kladiek považuj za zanedbateľne malé.

4. Populárna televízna relácia

Emka s nadšením sleduje populárnu reláciu, kde súťažia medzi sebou rôzni kováči pri výrobe železných historických zbraní. Podstatný proces počas súťaže je kalenie ocele. Oceľ je zliatina železa a uhlíka (a tiež iných kovov). Uhlík sa v železe rozpúšťa. Jeho množstvo môže dosiahnuť až $p_{\max} = 2,14 \%$ hmotnosti ocele. Kalenie je proces, pri ktorom rozžeravenú oceľ prudko schladíme v nejakom prostredí (voda, olej, roztavená soľ). Všeobecne platí, že čím obsahuje oceľ menej uhlíka, tým rýchlejšie musí byť schladená počas kalenia. Rýchlejšie chladenie vedie k tomu, že oceľ je tvrdšia, ale je menej húževnatá, a naopak.

V súťaži sa kalí veľký meč hmotnosti $m = 2,80$ kg.

- a) Urči hmotnosť m_C uhlíka, ktorý obsahuje oceľ meča s obsahom $p = 60\%$ z maximálneho p_{\max} možného množstva rozpusteného uhlíka? Výsledok vyjadrí v gramoch.

Kováč má pripravený olejový kúpeľ s objemom $V_0 = 8,00$ L oleja s teplotou $t_0 = 20,0$ °C, a oceľ meča je rozžeravená na $t_m = 660$ °C. Kováč chce, aby oceľ meča bola tvrdá, ale aj húževnatá, preto po vnorení meča do kúpeľa meč rýchlo vytiahne z kúpeľa. Tento postup vykoná celkom päťkrát, rýchlo za sebou. Pri každom schladení sa zmenší teplotný rozdiel medzi mečom a kúpeľom o polovicu.

- b) Koľko tepla Q_1 odovzdá meč olejovému kúpeľu počas prvého ponorenia?
 c) Aká bude výsledná teplota t_{m5} meča a aká bude výsledná teplota t_5 oleja po piatich ponoreniach?

Merná tepelná kapacita minerálneho oleja $c_o = 1,67$ kJ/(kg · °C), Merná tepelná kapacita ocele $c_m = 470$ J/(kg · °C), hustota oleja $\rho_o = 0,865$ g/cm³.

5. Svetlo v tme

Pavol sa ráno zobudil na to, že cez malý kruhový otvor ťažkého závesu na okne vniká, do inak tmavej miestnosti, ostré svetlo vychádzajúceho slnka, a vytvára na stene izby malý svetelný kruh. Vzdialenosť steny od závesu $L = 3,5$ m. Svetelné lúče sa šíria vo vodorovnom smere kolmo na stenu.

Spomenul si na súpravu Optik Kabinet, ktorú dostal od babičky, kde boli šošovky. Vybral jednu, ktorá mala $+2,00$ dioptrií a jednu ktorá mala $-1,5$ dioptrií.

- a) Ktorú šošovku a ako ďaleko od steny má dať, aby sa na stene vytvorila svetelná stopa s čo najmenším polomerom? Svoju odpoveď zdôvodni pomocou obrázku so zakreslenými lúčmi vytvárajúcimi stopu na stene.

Keď to urobil, a lepšie preskúmal vytvorenú svetelnú stopu, zistil, že sa nejedná o bod, ale o obraz Slnka.

- b) Aký bol priemer d_2 tohto obrazu Slnka na stene?

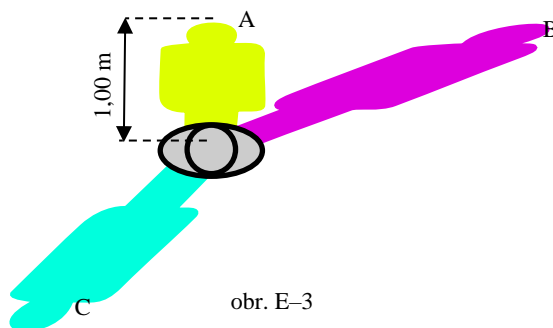
Pavol sa zamyslel, či by vedel zväčšiť obraz Slnka na stene pomocou druhej šošovky.

- c) Navrhni spôsob, ako by si zväčšil obraz Slnka na Pavlovom mieste využitím dvojice šošoviek, ktoré mal k dispozícii, priložených tesne ku sebe. Urči priemer d_3 takto vytvoreného obrazu Slnka.

Pavol si pamätal, že priemer Slnka je približne $D = 1,4$ mil. km a Zem je od neho vzdialená približne $r = 150$ mil. km. Veľkosť otvoru v závese je menší, ale inak porovnateľný s rozmermi šošoviek.

6. Na cudzej planéte

Vo vedecko-fantastickom románe Táňa veľa cestuje. Jedného dňa sa ocitla na planéte, ktorá mala tri slnká. Atmosféra bola veľmi riedka a v čistom vzduchu obloha skoro čierna, na ktorej žiarili tri slnká. Jedno slnko svietilo červene, druhé modro



obr. E-3

a tretie zeleno. Táňa stála na vodorovnej zasneženej planine a presne nad jej hlavou sa vznášal drón, ktorý snímал obraz jej tieňov na bielom snehu, obr. E-3. Táňa je vysoká – má výšku 175 cm – ale zaborila sa 25 cm do snehu. Jej najkratší tieň (označený A) má na snehu dĺžku 1,00 m a je vrhnutý presne na sever. Tieň A je žltý, tieň B je purpurový a tieň C je tyrkysový

- Prečo je na záberoch drónu sneh biely?
- Ktorá hviezda vrhá ktorý tieň?
- Ako „vysoko“ nad obzorom sú jednotlivé hviezdy? „Výšku“ vyjadri pomocou uhla pod ktorým možno hviezdy pozorovať nad vodorovnou rovinou, v ktorej sa Táňa nachádza.

Približná farba tieňov sa dá pozrieť pomocou zmiešavača farieb. Farba tieňov v RGB kódovaní sú: A(222,255,0), B(255,0,222), C(0,255,222)

(<https://www.csfieldguide.org.nz/en/interactives/rgb-mixer/>)

7. Zostrojenie metra (experimentálna úloha)

Dnes sa definuje meter v sústave SI, ako jedna zo základných fyzikálnych jednotiek, pomocou času. V roku 1671, francúzsky mních a astronóm, Jean Picard definoval základnú jednotku dĺžky tiež pomocou času. Definoval meter ako dĺžku tzv. *sekundového kyvadla*. Sekundovému kyvadlu trvá kmit z jednej krajnej polohy do druhej presne jednu sekundu (pol kmit; celý kmit, tam a späť, trvá 2 sekundy). Kyvadlo pozostáva z tenkej nite pevne uchytenej na jednom konci, a malého závažia upevneného na druhom konci nite.

Úloha

Zostav sekundové kyvadlo a presvedč sa, či jeho dĺžka je skutočne 1,00 m. Popíš podrobne postup, ako si spresňoval dĺžku kyvadla.

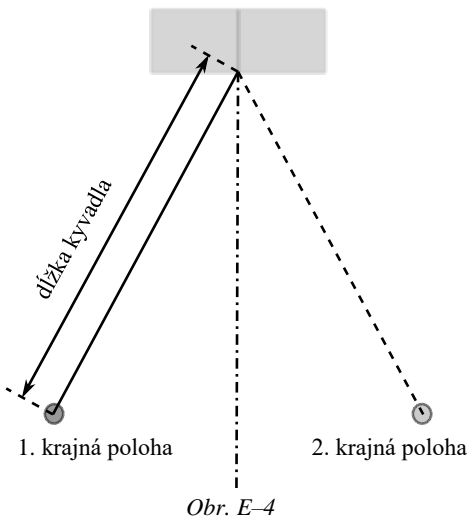
Pomôcky

Tenká a ohybná ale pevná niť dĺžky aspoň 1,5 metra, malé teliesko (kovová guľôčka s dierkou, matica od skrutky, alebo iný relatívne ťažký, ale malý predmet), stopky alebo aplikácia stopiek na mobilnom telefóne. Meradlo dĺžky (len na záverečnú kontrolu, počas samotného experimentu nesmieš používať.)

Postup

Na jeden koniec upevni teliesko, dajme tomu skrutku, kým druhý koniec pevne uchytiš (ale neodstrihni!). Pevný úchyt musí byť taký, aby si mohol meniť dĺžku nite medzi bodom závesu a telieskom.

Teliesko visiace na konci nite vychýliš do krajnej polohy a voľne pustiš – necháš, aby sa voľne kývalo na niti.



Budeš merať dobu, za ktorú kyvadlo urobí jeden pol kmit. Aby meranie bolo presné, nechaj aby kyvadlo urobilo aspoň 10 pol kmitov (5 celých kmitov), a na stopkách budeš merať túto dobu. Namerané údaje zaznamenaj do prehľadnej tabuľky.

Dĺžku kyvadla (nite) meň tak, aby si sa dopracoval k takej dĺžke kyvadla, pri ktorej je doba pol kmitu presne 1 sekunda.

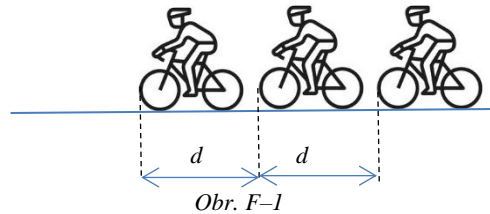
Výslednú dĺžku kyvadla skontroluj meradlom dĺžky a údaj tiež zaznamenaj do tabuľky ako kontrolnú hodnotu. Vyjadri o koľko percent sa líši dĺžka sekundového kyvadla od dĺžky 1,00 m (podľa meradla) a rozdiel zdôvodni.

Poznámka: kmity kyvadla trvajú vždy rovnako dlho, za predpokladu, že kmity sú malé, t.j. výchylky sa odchyľujú od zvislej (rovnovážnej) polohy len málo (najviac o 5°).

Kategória F

1. Cyklistické preteky

Pretekári so žltým, zeleným a bielym tričkom vytvorili malý pelotón, a odtrhli sa od ostatných. Keď im zostávalo do cieľa $s = 20,0$ km, pustil sa za nimi stíhací pelotón piatich pretekárov, ktorí za nimi zaostávali o $D = 1\,500$ m. Odstup pretekárov v oboch pelotónoch bol pravidelný, $d = 3,0$ m (vzdialenosť medzi prednými kolesami – pozri obr. F–1). Na čele oboch pelotónov sa pretekári striedali pravidelne – čelný pretekár sa odsunul bokom, odpočíval, kým zvyšní pretekári pokračovali nezmenenou rýchlosťou. Pretekár z čela sa potom zaradil na koniec pelotónu a zvýšil svoju rýchlosť na rýchlosť zvyšných pretekárov.



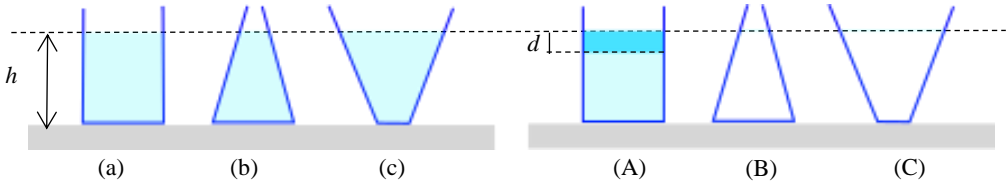
Pretekári v trojčlennom pelotóne mali rýchlosť $v_1 = 50,4$ km/h, kým pretekári v druhom pelotóne rýchlosť $v_2 = 55,8$ km/h. Pretekári v prvom pelotóne sa striedali každých $t_1 = 10$ s.

- Aká bola priemerná rýchlosť v_{p1} prvého pelotónu (rýchlosť vyjadri v jednotkách m/s aj km/h)?
- Akú priemernú rýchlosť v_{p2} musí mať druhý pelotón, aby dostihol prvý pelotón vo vzdialenosti $s_1 = 500$ m pred cieľom?
- Ako často (t_2) sa musia striedať pretekári v druhom pelotóne, aby dostihli prvý pelotón vo vzdialenosti $s_1 = 500$ m pred cieľom?

2. Mlieko a smotana

Sú kvapaliny, ktoré sú rovnorodou zmesou rôznych zložiek, ako napríklad mlieko. Ak mlieko necháme stáť, smotana (s vysokým obsahom tuku) sa oddelí od zvyšku mlieka. Vytvorí dobre rozpoznateľnú hornú vrstvu v nádobe, pričom sa celkový objem kvapaliny nezmení. Hustota čerstvo nadojeného mlieka (pri teplote 10°C) $\rho_m = 1,033$ g/cm³. Ak sa z nej oddelí smotana, zvyšok mlieka má hustotu $\rho_{m0} = 1,035$ g/cm³, kým smotana (s 36 %-ným obsahom tuku) $\rho_s = 1,005$ g/cm³.

Na obrázku F-2 sú znázornené poháre rôznych tvarov, do ktorých sme naliali rovnaké mlieko tak, že ich hladina je v rovnakej výške $h = 20$ cm (obrázky (a), (b), (c)). Do nádoby s rovnými stenami sme naliali $V = 2,00$ litra mlieka.



Obr. F-2

a) Na dno ktorej nádoby (obrázky (a), (b), (c) vľavo) pôsobí mlieko najväčším, a na ktorý najmenším tlakom? Svoju odpoveď zdôvodni.

Po určitom čase sa smotana oddelí od zvyšku mlieka, pričom celkový objem mlieka sa nezmení.

b) Aká je hrúbka d vrstvy smotany v nádobe na obr. (A)?

c) Prekresli obrázky (A), (B), (C) do svojho riešenia a naznač hrúbku smotany v pohároch na obr. F-2 (B) a (C) – svoje riešenie zdôvodni.

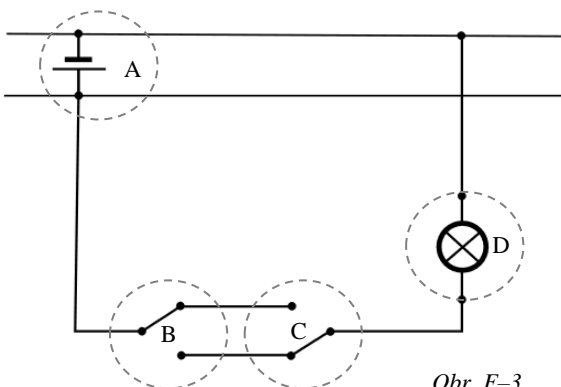
d) Na dne ktorej nádoby (obrázky (A), (B), (C) vpravo) pôsobí obsah nádoby najväčším, a na ktorý najmenším tlakom? Svoju odpoveď zdôvodni.

Poznámka: teleso s rovnými zvislými stenami výšky h a so základňou, ktorej plocha je S má objem $V = Sh$.

O tlaku kvapalín pozri vhodný zdroj informácií, napr. tu:

<https://teachers-paradise.webnode.sk/a2-7-tlak-kvapalin/>

3. Schéma zapojenia



Obr. F-3

Na obrázku F-3 je znázornený elektrický obvod s prvkami A, B, C a D (sú zakružkované prerušovanou čiarou – samotné krúžky s prerušovanou čiarou nie sú súčasťou nákresu elektrického obvodu).

a) Medzi zakružkovanými prvkami nájdí zdroj elektrického prúdu, spínač a žiarovku. Pomenuj prvky A, B, C a D

a zadaj aspoň jednu fyzikálnu charakteristiku každého z nich.

- b) Popíš, ako pracuje zapojenie podľa obrázku.
- c) Aký praktický problém rieši zapojenie na obrázku, a kde sa takéto zapojenie používa?

4. Kalenie ocele

Oceľ je jedným zo základných materiálov technologickej spoločnosti. Oceľ je zliatina železa s uhlíkom a ďalšími prvkami (chróm, mangán a podobne). Uhlík sa v železe rozpúšťa a jeho množstvo môže dosiahnuť maximálne až 2,14% hmotnosti ocele. Kalenie je proces, pri ktorom rozžeravenú oceľ prudko schladíme v nejakom prostredí (voda, olej, roztavená soľ).

- a) Kováč pripravuje repliku historického meča. Meč váži $m = 1,50$ kg a obsahuje polovicu maximálneho množstva rozpusteného uhlíka. Urči hmotnosť m_C uhlíka obsiahnutého v oceli meča.

Kováč má pripravený olejový kúpeľ s objemom $V_0 = 8,00$ L oleja s teplotou $t_0 = 20,0$ °C, a oceľ meča je rozžeravená na teplotu $t_m = 650$ °C.

- b) Na akej hodnote t_1 sa ustáli teplota olejového kúpeľa a meča pri ponorení meča do oleja až do vyrovnania teplôt počas kalenia?
- c) Koľkokrát viac tepla by odovzdala oceľ rozžeraveného meča po ponorení do vodného kúpeľa s objemom $V_v = 10,0$ L a teplotou $t_0 = 20,0$ °C (do vyrovnania teplôt), než odovzdala olejovému kúpeľu?

Merná tepelná kapacita vody $c_v = 4,18$ kJ/(kg · °C), merná tepelná kapacita minerálneho oleja $c_o = 1,67$ kJ/(kg · °C), merná tepelná kapacita ocele $c_m = 470$ J/(kg · °C), hustota vody $\rho_v = 1,00$ g/cm³, oleja $\rho_o = 0,865$ g/cm³.

5. Čaj, lyžička, voda

Peter sedel v záhrade a mal pred sebou čaj s objemom $V_1 = 2,00$ dl a teplotou $t_1 = 80,0$ °C, a v ňom lyžičku. Vedľa mal veľký pohár studenej vody s objemom $V_2 = 5,00$ dl a s teplotou $t_2 = 10,0$ °C. Čaj bol horúci, tak ho miešal kovovou lyžičkou, ale tá ho páčila na prstoch, lebo sa okamžite zohriala. Ponoril preto prázdnu lyžičku do pohára so studenou vodou a lyžička sa skoro okamžite schladila – teplota lyžičky a teplota studenej vody sa vyrovnali. Kovová lyžička mala hmotnosť $m_L = 50,0$ g.

- a) Koľko tepla Q_L preniesol lyžičkou z čaju do studenej vody?

Lyžičku vrátil naspäť do pohára s čajom, samozrejme, okamžite ho začala páliť na prstoch. Peter sa zamyslel: „Čaj sa mal trochu schladíť od studenej lyžičky.“

b) O koľko stupňov Celzia (Δt_1) sa schladil čaj po vložení ochladenej lyžičky a vyrovnání teploty?

Peter sa znova zamyslel. Ak bude takto pokračovať, môže čaj úplne schladieť.

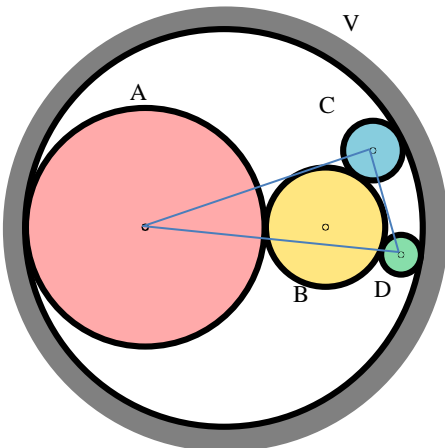
c) Na akú najnižšiu teplotu by sa dal popísaným postupom schladieť čaj?

Peter chvíľku počítal, a potom povedal svojej sestre, ktorá čítala vedľa neho, že stačí, aby zopakoval výmenu tepla medzi čajom a vodou 29-krát a teploty sa vyrovnajú. Sestra len pokrývala hlavou, na znak, že si myslí, že Peter sa mýli.

d) Kto z nich mal pravdu a prečo?

Hustota vody $\rho = 1,000 \text{ g/cm}^3$, merná tepelná kapacita vody $c = 4,182 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$, merná tepelná kapacita kovu lyžičky $c_L = 423,6 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$. Výmenu tepla s okolím, pohármi a Petrovim prstom zanedbajte.

6. Kolesá v rúre



Obr. F-4

Na obrázku F-4 je rúra V s vnútorným obvodom $o_V = 98 \text{ cm}$. V rúre sú štyri kolesá A, B, C, D s obvodmi:

$o_A = 60 \text{ cm}$, $o_B = 30 \text{ cm}$, $o_C = 15 \text{ cm}$ a $o_D = 10 \text{ cm}$. Stredy kolies A, D, C sú uchytené do pevného trojuholníkového rámu. Kolesá sa môžu voľne otáčať okolo svojej osi. Povrchy kolies sa navzájom neprešmykujú, a neprešmykujú sa ani povrchy kolies na vnútornom povrchu valca.

Najprv je rám ADC nehybný a otáča sa rúra.

a) Koľkokrát sa otočí najmenšie koleso D, ak najväčšie koleso A sa otočí 4-krát?

b) O koľko stupňov sa otočí koleso B, ak sa rúra pootočí o 30° ?

Potom sa rúra prestane otáčať a zostane nehybná, ale začne sa otáčať rám s kolesami.

c) O koľko stupňov sa otočia jednotlivé kolesá A, B, C, D okolo svojich osí, ak trojuholníkový rám sa otočí o 360° ?

- d) O koľko stupňov sa pootočí najväčšie koleso okolo svojej osi za jednu sekundu, ak dotykový bod najmenšieho kolesa sa pohybuje po povrchu nehybnej rúry rýchlosťou $v = 49 \text{ cm/min}$?

7. Goetheho barometer – Experimentálna úloha

JOHANN WOLFGANG VON GOETHE bol nielen básnik, ale tiež prírodovedec, ktorý zostavil jeden z prvých barometrov. Barometer je zariadenie na meranie atmosférického tlaku.

V stredoveku hojne využívali princíp spojených nádob k prečerpávaniu vody z jedného miesta na druhé. Jeden Galileiho známy si mu sťažoval, že potrubie, ktoré postavil cez kopec vysoký 21 metrov nechce pracovať. Galilei mu vtedy podal nesprávne vysvetlenie, v ktorom povedal, že vákuum nemá dostatočnú „pevnosť“, aby dokázal vytiahnuť vodu v potrubí tak vysoko (21 m). Prirovnal to pevnosti lana, ktoré sa tiež trhá, pokiaľ ho príliš zaťažia.

Správne vysvetlenie javu podal Toricelli v roku 1644. (Naštuduj si čo je atmosférický tlak, a ako sa meria – pozri napr. <https://teachers-paradise.webnode.sk/a10-4-tlak-plynov/>.)

Na základe správneho vysvetlenia veľmi rýchlo boli zostrojené prvé barometre, pomocou ktorých bolo možné predpovedať počasie (napr. blížiacu sa búrku). Jeden taký barometer navrhol a zostavil Johann Wolfgang von Goethe, ktorý je známy skôr ako básnik.

Úloha

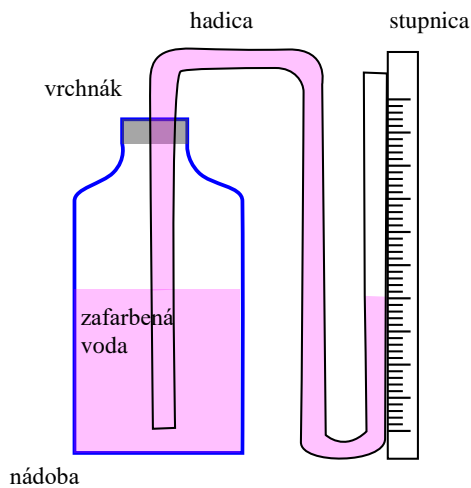
Vysvetlite princíp činnosti barometra. Zostavte Goetheho barometer a zaznamenajte v priebehu týždňa zmeny tlaku (ráno, na obed a večer). Výsledky zapisujte do vhodnej tabuľky. Diskutujte vplyv teploty na meranie. Ako je možné predpovedať počasie pomocou barometra?

Pomôcky

Pevnostenná nádoba (napr. sklenená fľaša od mlieka), tenká a priehľadná hadička, voda a farbivo do vody, kvapka oleja, papierový pás so stupnicou.

Postup

- 1) Zostav zariadenie, aké je na obrázku F-5.



Obr. F-5

Pre správnu činnosť je podstatné, že nádoba je naplnená vodou len do polovice, a do vody v nádobe je ponorená hadička, tiež naplnená vodou. Hadička je vedená

von z nádoby cez vrchnák, ktorý vzduchotesne uzatvára nádobu (aj v mieste, kde prechádza hadička) – odporúča sa utesniť uzáver zakvapkaním parafínom zo sviečky. Druhý koniec hadičky a stupnica je na voľnom vzduchu pripevnená k nádobe (!) pre spoľahlivé odčítanie hladiny vody v hadičke.

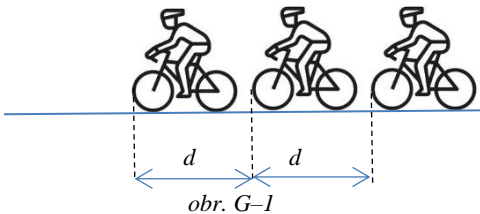
Kvapka (malé množstvo) oleja sa použije na hladinu vody v otvorenom konci hadičky, aby sa zamedzilo odparovaniu vody z hadičky.

Poznámka: Tvoj domáci barometer umiestni čo najďalej od okna, najlepšie do pivnice (ak máš takú možnosť), kde je ustálená teplota počas celého dňa. Aby sa zamedzilo vplyvu teploty, hodnoty meraj vždy v tú istú dennú dobu. V princípe je možné použiť aj PET fľašku, teda nie pevnostennú nádobu, pokiaľ sa nádoby nebudeš dotýkať počas prevádzky.

2) Vykonávaj meranie – odčítanie výšky stĺpca v otvorenom konci hadičky pomocou stupnice. Výsledky zapisuj do prehľadnej tabuľky. Pri každom meraní zaznamenaj dátum a čas merania. Zaznamenaj tiež oficiálny údaj tlaku pre tento čas najbližšie k tvojmu miestu (napr. <https://pocasio.sme.sk>)

Kategória G – Archimediáda

1. Cyklistické preteky



Pretekár so žltým tričkom sa odtrhol od zvyšku pretekárov a vybudoval si náskok $D = 990$ m. Pohyboval sa stálou rýchlosťou $v_z = 49,5$ km/h. Keď mu zostávalo do cieľa $s = 13,0$ km, pustil sa za ním stíhací pelotón piatich pretekárov. Vzďialenosť medzi prednými kolesami po sebe nasledujúcich prete-

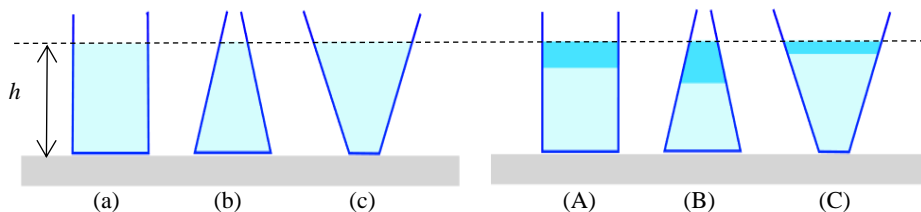
károv v pelotóne bola $d = 3,0$ m. Pretekár na čele pelotónu mal rýchlosť $v = 54,0$ km/h. Na čele pelotónu sa pretekári striedali pravidelne každých $t_1 = 10$ s. Čelný jazdec sa odsunul bokom, mierne spomalil a odpočíval, kým zvyšok pelotónu ho predbehol rýchlosťou v , potom sa zaradil na koniec pelotónu opäť rýchlosťou v .

- Aká bola priemerná rýchlosť v_p stíhacieho pelotónu (vyjadrite v jednotke km/h)?
- Dobehne pelotón pretekára v žltom tričku, pokiaľ ten udržuje svoju rýchlosť $v_z = 49,5$ km/h až do cieľa?
- Ako ďaleko od cieľa by dobehol pelotón pretekára v žltom tričku, ak by sa vo vedení pelotónu striedali každých $t_2 = 30$ s?

2. Poháre rôznych tvarov

Sú kvapaliny, ktoré sú rovnorodou zmesou rôznych zložiek, ako napríklad mlieko. Ak mlieko necháme stáť, smotana (s vysokým obsahom tuku) sa oddelí od zvyšku mlieka. Vytvorí dobre rozpoznateľnú hornú vrstvu v nádobe, pričom sa celkový objem kvapaliny nezmení.

Na obrázku G–2 sú znázornené poháre rôznych tvarov, do ktorých sme naliali rovnaké mlieko tak, že ich hladina bola v rovnakej výške h (obrázky (a), (b), (c)).



Obr. G–2

a) Na dno ktorej nádoby (obrázky (a), (b), (c) vľavo) pôsobí mlieko najväčším, a na ktorý najmenším tlakom? Svoju odpoveď zdôvodni.

Po určitom čase sa smotana oddelí od zvyšku mlieka.

b) Prečo je hrúbka vrstvy smotany v nádobe B na obrázku väčšia a prečo v nádobe C na obrázku menšia, než v nádobe A na obrázku?

c) Na dne ktorej z nádob A, B, C na obr. G–2 vpravo pôsobí obsah nádoby najväčším, a na dne ktorej najmenším tlakom? Svoju odpoveď zdôvodni.

O tlaku kvapalín pozri vhodný zdroj informácií, napr. tu: <https://teachers-paradise.webnode.sk/a2-7-tlak-kvapalin/>

3. Miznúce ľadovce

Od roku 1994 rýchlo ubúdajú ľadovce na pevninách aj na moriach. Na pevninách sa ľadovce nachádzajú v pohoriach (Himaláje, Alpy, Andy, Skalnaté vrchy, Aljaška, Africká priekopová oblasť,...), tiež na Grónsku a Antarktíde, kým na moriach hlavne v Severnom ľadovom oceáne.

V pohoriach sa zmenšujú ľadovce ročne o 400 miliárd ton, v Grónsku ročne o 294 miliárd ton a na Antarktíde ročne o 127 miliárd ton.

Hustota ľadu $\rho_L = 0,917 \text{ g/cm}^3$.

- a) O koľko kilometrov kubických sa zmenší objem uvedených ľadovcov za jeden rok?
- b) O koľko milimetrov sa zvýši ročne hladina morí a oceánov v priemere, ak plocha oceánov $S_o = 361,9$ miliónov kilometrov štvorcových?

Keby sa roztopili všetky ľadovce na pevninách, hladina morí a oceánov by sa zvýšila približne o $H = 70$ m.

- c) Koľko kilometrov kubických ľadovcov je teraz na pevninách?

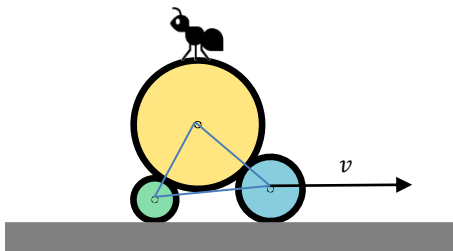
V Severnom arktickom oceáne je už len $22\,500\text{ km}^3$ ľadu a jeho množstvo prudko ubúda (13 % za desať rokov).

- d) O koľko milimetrov sa zvýši hladina morí a oceánov, ak sa roztopia všetky ľadovce v Severnom ľadovom oceáne?

Poznámka: Hustota vody z ľadovcov $\rho_v = 1\,000\text{ kg/m}^3$. Ak na ploche veľkosti S (nezávisle na tvare plochy) je vrstva vody hrúbky h , objem tejto vody je $V = Sh$.

4. Mravenec na kolieskach

Na obrázku G-3 sú tri kolieska. Ich osi (okolo ktorých sa voľne otáčajú) sú spojené



Obr. G-3

pomocou pevného trojuholníkového rámu (obr. G-3). Obvody koliesok sú 30 cm, 15 cm a 10 cm. Ak sa kolieska pohybujú, tak v mieste dotykov neprešmykujú – ani medzi sebou, ani na podlahe.

- a) Koľkokrát sa otočí pri pohybe po podlahe najmenšie koliesko, ak koliesko vpravo sa otočí 4-krát?
- b) O koľko sa posunie sústava koliesok, ak najväčšie koliesko sa otočí 3 aj polkrát?
- c) Mravec na najväčšom koliesku sa udržuje neustále na vrchu. V ktorom smere a akou rýchlosťou sa musí pohybovať na povrchu najväčšieho kolieska, ak ťaháme kolieska rýchlosťou v v smere, ako ukazuje obrázok?
- d) O koľko stupňov sa pootočí veľké koliesko, ak najmenšie sa pootočí raz okolo svojej osi?
- e) O koľko stupňov sa pootočí veľké koliesko za sekundu, ak kolieska ťaháme rýchlosťou $v = 90\text{ cm/min}$?

5. Experimentálna úloha – Hrúbka grafitovej vrstvy

Keď píšeš alebo kreslíš ceruzkou na papier, zanechávaš na papieri vrstvu grafitu. Surový grafit je čierny, preto bežné ceruzky s grafitovou tuhou zanechávajú čiernu stopu. Použi ceruzku s mäkkou tuhou (BB, 2B, prípadne B) a kresli na papier.

Úloha

Navrhni metódu, ako zmerať hrúbku grafitovej vrstvy, ktorú zanechá ceruzka, keď kreslíš alebo píšeš. Zmeraj hrúbku grafitovej vrstvy na papieri.

Pomôcky

Papier, pravítko, mäkká tuha daného priemeru (najlepšie mäkká mikrotuha BB alebo 2B s priemerom 0,5 mm).

Postup

Použi postup, ktorý si navrhol pre meranie a vykonaj meranie. Meranie opakuj aspoň 5-krát. Potrebné údaje zapíš do prehľadnej tabuľky, a vzájomne ich porovnaj.

Autori návrhov úloh:	Boris Lacsny E1,4,5, F1,3-5;G1,5 Aba Teleki E2,3,6,7, F2,6,7,G2-4
Recenzia a úprava úloh a riešení:	Ivo Čáp
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021

JUBILEUM

Doc. RNDr. Pavol Grešák, CSc. sa dožíva významného životného jubilea



Doc. RNDr. Pavol Grešák, CSc.

Doc. RNDr. Pavol Grešák, CSc. oslávil v máji tohoto roku 85 rokov. Je to príležitosť pripomenúť si jeho prínos pre matematiku, Žilinskú univerzitu a Jednotu slovenských matematikov a fyzikov.

Pavol Grešák sa narodil 8. mája 1936 v Nesluši na Kysuciach. V rokoch 1942 – 1951 absolvoval základnú školu. Dva roky študoval na reálnom gymnáziu a potom na Jedenást-ročnej strednej škole v Žiline, kde v roku 1954 úspešne zmaturoval⁶. V rokoch 1954 – 1958 študoval na Fakulte prírodných vied Vysokej školy pedagogickej (VŠP) v Bratislave aprobáciu matematika-deskriptívna geometria. Štúdium ukončil s vyznamenaním. V rokoch 1958 – 1959 pracoval ako asistent Katedry matematiky na VŠP a v rokoch 1959 – 1961 na Katedre matematiky Prírodovedeckej fakulty UK (PF UK) v Bratislave. V rokoch 1961 – 1962 pôsobil ako odborný asistent na Katedre geometrie PF UK. V roku 1953 vznikla v Prahe Vysoká škola železničná (VŠŽ), ktorá sa transformovala na Vysokú školu dopravnú (VŠD) a v roku 1961 sa presťahovala do Žiliny. Takže mladý Paľko Grešák dňa 1. októbra 1962 nastúpil na Katedru matematiky Fakulty strojnoelektrotechnickej (SET) VŠD v Žiline. Od začiatku nástupu na VŠD, (ktorá neskôr zmenila názov na Vysokú školu dopravy a spojov – VŠDS, a ešte neskôr sa transformovala na Žilinskú univerzitu) prednášal a viedol cvičenia z matematiky, algebry a geometrie v dennom, externom aj večernom štúdiu. Bol konzultantom

⁶ Systém školstva sa totiž v tých rokoch viackrát zmenil. Reálne gymnáziá boli nahradené JSS-kami, teda jedenástročnými strednými školami. O niekoľko rokov neskôr osemročné základné školy boli nahradené deväťročnými ZDS-kami a JSS-ky boli nahradené SVŠ-kami, teda strednými všeobecno-vzdelávacími školami.

a skúšal aspirantov v predmete aplikovaná matematika na fakulte SET, neskôr doktorandov na Fakulte prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov (PEDaS) a na Elektrotechnickej fakulte. Po vzniku Fakulty prírodných vied Žilinskej univerzity vypomáhal tejto fakulte s výučbou geometrických predmetov pre učiteľské študijné programy v jednom akademickom roku. Ku študentom bol náročný, ale priateľský, ochotný poradiť.

Vo februári 1974 úspešne obhájil kandidátsku dizertačnú prácu na PF UK v Bratislave a získal hodnosť kandidáta fyzikálno-matematických vied, teda CSc. V prvom období vedecky pracoval v oblasti klasickej diferenciálnej geometrie a publikoval práce, v ktorých používal metódu Cartanových vonkajších foriem. V decembri 1980 úspešne obhájil habilitačnú prácu: *“Nelineárne konexie druhého rádu na istých varietách“* na PF UK v Bratislave. Minister školstva ho 1.6.1981 menoval docentom pre odbor matematika. V ďalšom období pracoval v oblasti štruktúrnych problémov diskretnej geometrie v rámci vedeckého seminára vedeného doc. RNDr. Vojtechom Bálintom, CSc.

Isté obdobie pracoval ako redaktor časopisu Práce a štúdie VŠDS – séria matematicko-fyzikálna, ktorý sa neskôr transformoval na Studies of the University in Žilina – mathematical series. Napísal kvalitné skriptá pre predmet algebra a geometria, je spoluautorom ďalších 12 titulov skript a jednej vysokoškolskej učebnice.

V akademickom roku 1980-1981 vykonával funkciu vedúceho katedry matematiky fakulty SET. Od 1. 9. 1981 rozhodnutím ministerstva školstva bola vytvorená jediná katedra matematiky na VŠDS, na ktorej vykonával funkciu zástupcu vedúceho katedry do 31. 8. 1982. V období od 1. 9. 1982 do 31. 9. 1985 vykonával funkciu vedúceho tejto katedry. V čase od 1. 9. 1985 do 25. 1. 1990 bol prodekanom pre výchovno-vzdelávaciu činnosť na fakulte PEDaS. Od 15. 4. 1990 bol poverený vedením katedry matematiky na fakulte PEDaS. Od 31. 1. 1991 bola katedra preradená na stavebnú fakultu, funkciu vedúceho tejto katedry vykonával do 31. 1. 1994. Od 1. 9. 1994 časť tejto katedry prešla znova na fakultu PEDaS, kde funkciu vedúceho katedry matematiky vykonával do 31. 8. 1998.

Docent Grešák bol vedúcou osobnosťou Jednoty slovenských matematikov a fyzikov. Do Jednoty vstúpil roku 1957 ešte ako študent. Už v roku 1961 aktivoval svoju prácu v bratislavskej pobočke Jednoty prednáškami pre žiakov stredných škôl - riešiteľov Matematickej olympiády. Po príchode do Žiliny sa zapojil do aktivít vedených RNDr. Ladislavom Bergerom. Z týchto aktivít treba vyzdvihnúť najmä letné školy v Poprade, kde mal na starosti sekciu z diferenciálnej geometrie. Samostatne organizoval jednu zimnú a jednu letnú školu z diferenciálnej geometrie. Mnoho rokov bol aktívnym členom skupiny žilinských matematikov, ktorá organizovala konferencie slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom. V článku [1] nám pomohol objasniť začiatky týchto konferencií, za čo vďačíme

najmä jeho výbornej pamäti, ktorú si zachoval do dnešných dní. Bol členom Komisie pre výučbu na vysokých školách technických, ekonomických a poľnohospodárskych (Komisia VŠTEP), ktorá pracovala v rámci JČSMF veľa rokov. Podieľal sa na organizácii niekoľkých konferencií tejto komisie. Bol členom výboru Matematickej sekcie JSMF viac funkčných období. Jedno skrátené funkčné obdobie bol aj predsedom Slovenskej matematickej spoločnosti (SMS). V rokoch 2004 a 2005, keď bol predsedom SMS, zastával aj čestnú funkciu predsedu konferencie slovenských matematikov. Mnoho rokov pracoval v rôznych funkciách JSMF od predsedu pobočky v Žiline až po členstvo v ÚV JSMF. Vymenovať všetky jeho aktivity je veľmi ťažké a je potrebné za nimi vidieť obrovské množstvo hodín rôznorodej práce. Za túto činnosť bol ocenený rôznymi diplomami, titulom zaslúžilého člena a nakoniec aj čestného člena JSMF a pri príležitosti 150. výročia založenia Jednoty v roku 2012 bol ocenený Pamätným listom predsedu celoslovenského výboru JSMF.

Za dlhoročnú úspešnú pedagogickú činnosť bol nedávno ocenený Pamätnou medailou J. A. Komenského, ktorú mu v roku 2016 udelila rektorka Žilinskej univerzity pri príležitosti Dňa učiteľov.

K životnému jubileu Paľkovi Grešákovi prajeme, aby sa ešte veľa rokov tešil z dobrého zdravia. A my sa tešíme na ďalšie stretnutia s ním.

Vojtech Bálint⁷ a Mariana Marčoková.⁸

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

- [1] P. Grešák: *Niečo o tom, ako to v Jasnej pod Chopkom začalo*. 40. konferencia slovenských matematikov, Jasná pod Chopkom, 27.-30. november 2008, EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2008 (editori: E. Capková, M. Marčoková), 40-48.
- [2] O. Grošek^(*): *Jozef Sikora 75-ročný*. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, vol.: 25, no.: 44 (1996), 65-66.

E r r a t a: ^(*)V článku [2], ktorý vyšiel v OMFI 1996/44 je chybné uvedenie autora. Autorom je Pavol Grešák, a nie Otokar Grošek, ako je uvedené v publikovanom článku

⁷Nám. L. Fullu 21, 010 08 Žilina, **e-mail:** vojtech.balint@gmail.com

⁸Tulská 24, 010 08 Žilina, **e-mail:** mariana.marcokova@gmail

SPOMÍNANIE

Život a dielo profesora Martina Gavaleca (1942-2021)

Dňa 23. marca 2021 nás náhle opustil profesor Martin Gavalec. Stal sa obeťou vírusu COVID-19, ktorý bez pridružených ochorení za krátky čas spôsobil v jeho organizme fatálne zmeny. Odišiel človek, obdarený mnohými talentami, ktorý celý svoj život zasvätil svojej milujúcej rodine a práci, ktorá ho nesmierne naplňovala - vzdelávaniu mladých ľudí a vedeckému bádaniu.

Profesor Martin Gavalec študoval na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave vedeckú špecializáciu v odbore Matematika. Jeho matematická kariéra začala na Matematickom ústave SAV v Bratislave, odkiaľ neskôr prešiel na Prírodovedeckú fakultu UPJŠ v Košiciach. Na vtedajšej Katedre geometrie a algebry sa okrem vedecko-pedagogickej činnosti podieľal na tvorbe a realizácii systému aktívneho vyhľadávania talentovaných študentov zaujímavých sa o štúdium matematiky. Výsledkom tejto činnosti bol zvýšený nárast študentov na PF UPJŠ ako aj mnoho úspešných riešiteľov v krajských, celoštátnych a medzinárodných kolách matematickej olympiády. Pôsobil deväť rokov ako predseda Krajského výboru Matematickej olympiády. Stál pri zrode východoslovenského Korešpondenčného matematického semináru.

V roku 1975 obhájil dizertačnú prácu a získal vedecký titul kandidáta vied v odbore Algebra a teória čísel. Jeho nasledujúcim pôsobiskom sa stala Univerzita veterinárneho lekárstva a farmácie v Košiciach. Na Katedru matematiky a teoretickej informatiky Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach prešiel v roku 1992. V tomto období sa začal venovať vedeckej



Prof. RNDr. Martin Gavalec, CSc.

oblasti tzv. diskretným dynamickým systémom. Získané výsledky a publikované práce ho posunuli medzi špičku v odbore. Mnohé jeho publikácie boli zásadné a obsahujú zovšeobecnenia dovedy známych neúplných poznatkov. Na základe dosiahnutých výsledkov získal na Fakulte informatiky a managementu Univerzity v Hradci Králové funkčné miesto docenta. Bola to výzva, ktorú sa Martin rozhodol akceptovať v roku 1998 a následne sa s celou rodinou presťahoval do Hradca Králové. Pôsobenie na novom, modernom pracovisku s veľmi prajnou pracovnou atmosférou sa ukázalo ako najplodnejšie obdobie Martinovej vedeckej kariéry. Publikoval v najprestížnejších vedeckých časopisoch, opakovane získal cenu rektora univerzity za najlepšie publikačné výstupy a v roku 2017 mu mesto Hradec Králové udelilo medailu ako ocenenie jeho akademického pôsobenia na Univerzite v Hradci Králové. Medzi najznámejšie práce patria publikácie zamerané na intervalovú analýzu diskretných dynamických systémov v extrémnych (max-plus, max-min a max-Lukasiewicz) algebrách a algoritmické riešenie niekoľkých dovedy otvorených problémov z oblasti stabilných stavov v diskretných dynamických systémoch s nepresnými dátami, ale aj algoritmy, ktoré efektívne riešia dvojstranné max-min lineárne systémy. Popri hlavnom zameraní na extrémálne algebry a diskretné dynamické systémy, mal práce aj z iných oblastí ako sú fuzzy logika, operačný výskum, deterministická teória hromadnej obsluhy, biomedicínske aplikácie a ďalšie. Bol riešiteľom niekoľkých vedeckých projektov základného výskumu, na ktorých pôsobili spoluriešitelia z Karlovej univerzity, Sliezskej univerzity, Univerzity Palackého, Univerzity v Birminghame a Technickej univerzity v Košiciach. V roku 2006 bol menovaný profesorom v odbore Aplikovaná matematika.

V pedagogickej oblasti bol autorom alebo spoluautorom niekoľkých učebných textov z oblastí optimalizačných metód, pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, vysokoškolskej učebnice Algebra a teoretická aritmetika a dvoch monografií *Periodicity in Extremal Algebras* a *Decision Making and Optimization*.

Tešili ho vyjdené publikácie, ale keďže cesta je cieľ, väčšiu radosť mu prinášalo samotné bádanie. Bol hlbavý, trpezlivý a stále optimistický. Ním vyslovené slová a vyslané myšlienky boli hlboké, povzbudzujúce a láskavé. Pokojná povaha a rozvaha boli jeho silné stránky, pre ktoré ho vyhľadávali kolegovia a priatelia. Každá komunikácia podporená širokou rozhladenosťou a sčítanosťou bola príležitosťou viesť dialóg na rôzne témy. Ľudí si ctil. Jeho poslaním nebolo ľudí meniť, ale pomáhať im. Bol to cieľavedomý človek. Nevzdával sa. Bol aktívny do poslednej chvíle svojho života. Mal ešte svoje plány a ciele. Aj keď už nie je medzi nami, zanechal pre nás svoje duševné bohatstvo a múdrosť.

Bol chápacím a nápomocným aj pre doktorandov a kolegov. V čase, keď sa potenciál spoločných seminárov doktorandov ukázal ako málo efektívny, zvolil časovo náročnú formu individuálnych konzultácií. Tento prístup pozitívne zmenil vzťah školiteľ - doktorand a vzťah študentov k bádaniu, výsledkom čoho bolo

množstvo kvalitných vedeckých výstupov a vysoká úspešnosť doktorandského štúdia. Plynulá komunikácia v štyroch svetových jazykoch bola ďalším jeho darom, ktorým premošoval odborné kontakty a využíval na konferenciách a pobytoch na univerzitách v Spojených štátoch, Mexiku, Austrálii, Argentíne, Japonsku, Rusku a v mnohých európskych krajinách a tiež pri organizovaní medzinárodných vedeckých podujatí.

Opustil nás skvelý človek, vážený kolega a uznávaný vedec. Martin, Tvoje zásluhy na rozvoji extrémálnych algebier a diskretných dynamických systémov sú nezabudnuteľné. Sme Ti vďační za Tvoj ľudský prístup a odborný prínos. Budeš veľmi chýbať nie len nám, Tvojim kolegom po celom svete, ale najviac zo všetkých, Tvojej rodine.

Češť Tvojej pamiatke!

Ján Plavka⁹

⁹ Katedra matematiky a teoretickej informatiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technickej univerzity v Košiciach, Nemcovej 32, 04001 Košice, **e-mail:** jan.plavka@tuke.sk

RECENZIA

Vyjadrenie k „učebnici“

**Recenzia na knihu Mareka Lišku a kol.: Funkcie
Matika pre spolužiakov, Bratislava, 2018**

Pohl'ad matematika

Vojtech Bálint

Marek Liška, Tomáš Valenta, Lukáš Král a kolektív sa v ČR rozhodli, že oni sú predurčení naučiť matematiku každého. A každého ju naučia dokonca aj proti jeho vôli, teda naučia aj takých, ktorým sa učiť nechce, takže každý sa tú protivnú a nepotrebnú matiku naučí bez práce.

Spomínaný kolektív autorov „spáchal“ seriál kníh *matika pre spolužiakov*, alias *my ťa to naučíme*. Voľakedy bolo zvykom, že serióznu učebnicu musí najprv recenzovať, a teda schváliť jej vydanie, profesor alebo docent. Proste niekto, koho odborné vedomosti boli nespochybniteľné. Pravda je, že dnes ani tituly prof. alebo doc. nezaručujú nespochybniteľné vedomosti, ale predsa len čosi ešte znamenajú – aspoň v matematike. Žijeme však v časoch, keď ľudia majú len práva, lebo na povinnosti sa nejako zabudlo, slovo povinnosť je nepopulárne. Takže „učebnice“ má právo písať každý a určite si nájde vydavateľa – najmä ak ide o knihy (na slovenské aj české pomery) s veľkým nákladom, ktorý sa bude navyše pravidelne opakovať. Je to proste biznis, nech už autori tvrdia čokoľvek. Záujem sa zabezpečiť nehanbným klamstvom, že takto sa matematiku naučí každý – to určite vzbudí záujem rodičov. A každoročné vydávanie sa zabezpečí tzv. pracovnými zošitmi, ktoré sú na jedno použitie, sú mimoriadne neúsporné (obrovské voľné plochy pre dvojriadkový výpočet), a teda sú obzvlášť nepriateľské voči prírode. Pracovný zošit je obrovské plytvanie papierom. Na Slovensku dokonca vznikla kvôli tomuto biznisu eseročka *PreSpolužiakov.sk.s.r.o.*

Pozrel som časť *Funkcie* a samozrejme aj príslušný pracovný zošit. Napíšem svoj názor a robím tak (bezplatne) na požiadanie JSMF. Nie je to recenzia, od ktorej závisí, či sa publikácia vydá alebo nevydá. Z toho dôvodu sa nebudem venovať hľadaniu každej chyby, čo sa robí obvykle ako pomoc autorom preto, aby publikácia bola po odbornej stránke čo najkvalitnejšia. Niektoré z tých chýb uvediem.

Predovšetkým vo všeobecnosti platí, že ak veta nie je správna syntakticky (tj. je chybná z jazykového hľadiska), tak nemôže byť správna matematicky. Takých chýb je tam hodne. Snaha vyjadriť niečo „študentským jazykom“, aby to vraj bolo zrozumiteľné, neopravňuje autora matematického textu k takým zjednodušeniam, aby vznikli nepresnosti, nejasnosti, viacznačnosti a už vôbec nie hrubé chyby. Veď práve matematika je tá disciplína, kde by sa záujemca – uchádzač o hrdý titul maturanta – mohol a mal naučiť logicky myslieť. Nepresnosti autorov neraz dokonca zahmlievajú podstatu.

Počítanie vzorových príkladov je miestami až trápne podrobné, zrejme za účelom čo najväčšieho počtu strán. Budí to dojem, že autori si povedali, že „*Teodor, aj keď nič nevieš a si lenivý, my ťa to naučíme*“. Poctivejšie by bolo Teodorovi povedať, že niečo sa predsa len bude musieť naučiť on sám. Lebo aj keď tomu on, Teodor neverí, keď sa niečo **málo** naučil (obvykle definíciu, aby vedel o čom to je a k tomu nejakú vetu, teda poznatok o súvislostiach), zrazu príde pochopenie a nemusí prechádzať veľmi veľa rozvláčne riešených príkladov, čo mu zaberie oveľa viac času. Navyše, tie vyriešené príklady nepomôžu vtedy, keď sa stretne s formuláciou, ktorá bude čo len trochu iná. Budí to dojem, že riešenia sú písané pre žiaka, ktorý sa síce učil a vzhľadom na vek asi už aj niečo iné (veď sa tam spomína maturita), ale nič nie je schopný si zapamätať, preto mu to treba nepretržite opakovane pripomínať. Poznámam, že metódou opakovania trivialít učíme psov a zvieratá vo všeobecnosti... Cieľ predviesť riešenie zrozumiteľne **pre každého** (t. j. aj pre slabých žiakov, ktorý nejavia záujem niečo sa naučiť) je pochopiteľný, ale len na jednom príklade. Riešenia ďalších by už mali byť čoraz ďalej kratšie.

Pristúpim ku konkrétnostiam.

Str. 14, 2. odsek, autori píšu: „*Svet je plný funkcií. Dokonca aj v živote sa používajú matematické termíny. Predstav si, že by si spáchal protizákonný čin, tak právny predpis by potom určil priebeh tvojho trestu.*“ Nuž, toto je hodne slaboduchý príklad. Nech je mi dovolené nepomáhať autorom desiatimi ďaleko inteligentnejšími príkladmi zo života.

14₆₋₅

Na rozdiel od autorov si nemyslím, že *funkcia je automat na žuvačky* a podľa mňa funkcia nie je ani o trochu neskôr uvedený *demolačný stroj*.

14₄

„*Každý hodnote, ktorá spadá do definíčného oboru, je priradená iná hodnota z oboru hodnôt.*“ To je samozrejme hlúposť! Vedia to aj autori, lebo hneď za tým píšu: „*Môže sa stať, že dve rôzne hodnoty z definíčného oboru budú mať rovnakú hodnotu z oboru hodnôt.*“ Lenže slabý žiak, pre ktorého je to písané, si len ťažko vyberie, že ktorá veta platí: prvá alebo druhá. Navyše v tej druhej vete chýba slovo **priradenú**. Lebo bez toho slova dostaneme nezmysel, ktorý sa vyskytuje veľmi

často (takmer systematicky) aj ďalej, dokonca v kryštalickej forme: *Jedno x má vždy maximálne jedno y* . Stručne teda: x má y ... a podobne aj v opačnom garde, teda y má x . Všade chýba podstata, slovo **priradené**. Že by podľa autorov žiak nebol schopný pochopiť slovo priradenie?

15 stred: „*Každý z nás je tak trochu funkcia*.“ Myslím, že násilie páchané na matematike a aj na jazykovej kultúre by malo mať svoje hranice.

15⁴

„*Ak zmeníš x , zmení sa možno aj hodnota y* .“ Slovo **možno** tam, ale nenapísali. To je podstatný rozdiel. Chápu to autori?

Autori učia žiakov vyjadrovať sa nepresne. Niekedy je dovolené vyjadrovať sa aj nepresne, ale treba na to upozorniť! Pri vysvetľovaní zložitých pojmov alebo súvislostí neraz „zasvietime svetlo“ z inej strany len preto, aby sa to zdalo jednoduchšie. Lenže pri každom takom „osvetlení“ zdôrazníme, že v tomto svetle nie je vidno všetko, ukazuje sa len jedna vec, ostatné sú v tieni. Nepresnosti v matematike sú enormne škodlivé. Učiť matematiku len preto, aby žiak úspešne prešiel cez nejaké skúšky, je mimoriadne hlúpy cieľ. Hlavným cieľom tejto „učebnice“ je však práve toto (okrem finančného zisku autorov a vydavateľstva).

Potom začnú nepríjemnosti s používaním symbolov. Mnoho autorov totiž má problémy s logikou. Čo znamená pre autorov symbol \rightarrow ? Ako sa to má čítať? Lebo autori píšú: x sa zobrazí na výraz $x - 5$. Lenže o kúsok ďalej (a potom mnohokrát) toto už nefunguje!

15₂

žltý blok: $f: y = \frac{x^2+1}{x+2} \rightarrow f(2) = \frac{2^2+1}{2+2}$. Tu sa už ukazuje nezmyselný spôsob používania symbolu \rightarrow . Čo ten symbol znamená a ako sa číta?

Str. 17, prvý žltý blok: $\frac{1}{2-x} \rightarrow 2 - x \neq 0 \rightarrow x \neq 2$. Tu už naplno vynikne nezmyselnosť používania symbolu \rightarrow . Lebo nefunguje to ako priradenie a nefunguje to ani ako implikácia. A často sa tá šípka vyskytuje aj trikrát za sebou.

Str. 17. *Funkcie sú maľovanky*. Naozaj? Ihneď za týmto heslom je napísané toto: „*Najjednoduchším spôsobom, ako funkciu zakresliť, je nájsť niekoľko bodov, ktorými funkcia prechádza. ... Body so súradnicami $[x, y]$ potom zakreslíš do grafu a spojiš čiarou. Je však treba si dávať pozor, pretože všetky funkcie nie sú „plynulá čiara“, ale často mávajú veľmi nepredpokladaný vývoj*.“ Lenže tento ďalší upresňujúci text už nenapraví veľa na tom, čo si zapamätá slabší žiak, pre ktorého je „učebnica“ písaná: **body treba spojiť čiarou**.

Áno, body treba spojiť čiarou, ale až potom, keď vieme jej vlastnosti! (O spájaní bodov podľa návodu písal okrem iných aj prof. Jozef Doboš, vid' [1].) A samozrejme nekreslí sa funkcia, ale jej graf.

25₁ „*Ani vypočítaný obvod potom nebude **nezáporný***.“ To je asi len nepozornosť, aj keď mrzutá...

26² „Prostá funkcia je taká funkcia, pri ktorej ku každým dvom rôznym x z definičného oboru existujú dve rôzne y z oboru hodnôt.“ Toto je už oveľa horšie, ako to, čo je na str.144: „ x má $y...$ “ Trvám na tom, že namiesto *existujú* je **bezpodmienečne nutné** napísať *sú priradené*. A menšie guľôčky $f(x_1), f(x_2)$ na obrázku sú mimoriadne mätkové dokonca aj pre človeka, ktorý vie, o čo ide.

Str.26. *Bude dnes inverzia?* Tu sa nachádza často používaný nezmysel: „*inverzná funkcia sa označuje horným indexom* $^{-1}$, napr. f^{-1} .“ Intelligenti používajú dolný index, teda f_{-1} . Robia tak už len preto, aby sa to **neplietlo** s prevrátenou hodnotou, ktorá sa samozrejme hojne používa aj v tejto publikácii! Je nezmyselné odvolávať sa na to, že predsa v hromade kníh je f^{-1} , lebo vo všetkých tých knihách **je to z pedagogického hľadiska zle!** Aj slabý žiak si (možno) zapamätá, že $a^{-1} = \frac{1}{a}$, a my to po ňom chceme (!), takže samozrejme aj $f^{-1} = \frac{1}{f}$. Potom sa žiak so svätou prostotou pýta „*Prečo sa robí taká veda okolo inverznej funkcie, keď je to vlastne prevrátená hodnota?*“ (Autori neskôr na str.125 dokonca použijú slovo „prevrátená“.)

Str.27. Príklad 2: ... $f: y = \frac{1}{2}x + 3$. Postup v žltom bloku vyzerá nasledovne: $f: y = \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow f^{-1}: x = \frac{1}{2}y + 3$, ale o pár riadkov ďalej je $f^{-1}: y = 2x - 6$.

Okrem už spomínaného nejasného významu symbolu \rightarrow a nevhodnosti symbolu f^{-1} sa tu nájde aj jedna z **najpodstatnejších chýb v matematike**: dve rôzne veci označené tým istým symbolom f^{-1} . Tá prvá funkcia (t. j. predpis, pravidlo, priradenie) vydolí veličinu dvomi a potom pripočíta tri, tá druhá veličinu vynásobí dvomi a potom odpočíta 6.

str.28, Príklad 3, funkcia g je daná tabuľkou (pre 6 rôznych hodnôt x) takže text „*Vypočítaj $D(g), H(g)...$* “ je smiešny, žiak nič nebude počítat, lebo to vidí... Je tam však aj jedna podstatná chyba: pre hodnotu $x = 1$ je v tabuľke priradená zaujímavá hodnota $-$. Lenže autori hodnotu $x = 1$ nezaradili do definičného oboru. Je to v príkrom rozpore s ich definíciou funkcie (str.14): Funkcia je zobrazenie množiny A (množina vzorov x) do množiny B (množina obrazov y). A pod obrázkom je napísané: „*Predstav si funkciu f ako automat na žuvačky. Ak doňho vhodíš 50 centov, vypadne ti žuvačka za 50 centov. Ak doňho vhodíš 1 cent, vypadne ti cent naspäť, pretože žiadna žuvačka za 1 cent neexistuje.*“ Áno, na riadkoch 5-6 dole na str.16 je vetička, že „*Ak nie je uvedené inak, počíta sa s tým, že definičným oborom je množina všetkých reálnych čísel.*“ Lenže tu je tabuľkou povedané, že je to inak. A navyše nikde sa nenachádza, že obor hodnôt je podmnožina množiny reálnych čísel, takže je možné nejakej hodnote x priradiť aj napr. mačku alebo $-$.

V príklade 6 na str. 31 v prvom sivom bloku je pozoruhodná formulácia: „*Vieš, že menovateľ v zlomku sa nesmie rovnať nule, a preto dáš celý výraz pod zlomkovou čiarou do rovnice (s prečiarknutým znamienkom rovnosti) s nulou.*“ To žiak sa

len teraz dozvie o symbole \neq ? O slovnom spojení „*dáš do rovnice*“ a o tej predložke „*v*“ radšej pomlčím.

Str.32, zhrnutie oborov „...výraz pod odmocninou nie je záporný“. Autori naozaj nevedia vypočítať $\sqrt[3]{-8}$ alebo je im zaťažko napísať **párnou** odmocninou?

32₄ *prohodiš* je prípustný preklep (zrejme prekladatelia zabudli pri úprave pôvodného českého textu prepísať *o* na *e*.)

Str.35, Spojitosť funkcie. „*Vo všeobecnosti je potrebné si funkciu rozkúskovať na problémové miesta, t. j. miesta, kde sa zmení znamienko (pri absolútnej hodnote), alebo kde nie je funkcia definovaná a podobne.*“ Ukazujú sa **zásadné medzery** v znalostiach autorov. Mali by si zopakovať nasledovné: Funkcia $f(x) = |x|$ je spojitá a na základe vety o spojitosti zloženej funkcie absolútna hodnota nemôže spôsobiť nespojitosť.

Str.38, Príklad 2: „*Urč a dokáž, či je funkcia $f(x) = x^4$ párna alebo nepárna.*“ **Určiť** a **dokázať** to alebo ono je nácvik nepresných formulácií. Slovo určiť je tu zbytočné, lebo určiť teoretickú záležitosť znamená dokázať ju. Zdá sa, že pod slovom určiť mali autori na mysli dosadenie čísel 2 a -2 , čo predvádzajú na 8 riadkoch. Lenže to je zbytočné: ak $f(2) = f(-2)$, tak ešte nie je párnosť určená. A zbytočné dosadenie dvoch opačných čísel opakujú aj v ďalších príkladoch. Autori mali začať tým, čo je v treťom sivom bloku: „... *pred x dáš mínus*“. Keď už autori chceli získať nepotrebné riadky, mohli to urobiť inteligentne: Pretože $f(-2) = f(2)$, funkcia nemôže byť nepárna. Skúsime teda dokázať vzt'ah $f(-x) = f(x)$ pre všetky reálne čísla, teda skúsime dokázať, že funkcia je párna. A záver príkladu v poslednom žltom bloku len potvrdzuje snahu napísať čo najviac riadkov: „*Funkcia daná predpisom x^4 je párna, nie nepárna*“. K čomu je dobrá časť za čiarkou? Vnáša to do hláv slabších žiakov len nejasnosť, či by funkcia nemohla byť aj párna aj nepárna. Iste, funkcia konštantne rovná nule ako jediná, uvedená na str.39. Niekomu sa môže zdať, že to prehánam, ale že to tak nie je, potvrdzuje aj príklad 3 na str.38, „*Urč a dokáž, či... kde záver je: ... funkcia g je **len** nepárna*“.

Ku strane 40. Pozoruhodná je snaha autorov vyhnúť sa použitiu **veľkého kvantifikátora**, čo neraz vedie aj k nezmyslom. Samozrejme, dá sa tomu kvantifikátoru vyhnúť: Ak A , tak B . Nie je explicitne použitý veľký kvantifikátor pred tým predpokladom A , lebo je tam zamlčaný: **Vždy**, keď platí A , potom platí aj B . Niekedy ale naozaj nie je dôvod zamlčať, že ide o **všetky** objekty, ktoré to A splňujú. Ba dokonca je vhodné to zdôrazniť! Na str. 40 je tabuľka o monotónnosti funkcie. Lenže namiesto toho, aby autori v definícii poctivo napísali ... **pre všetky** x_1, x_2 také, že $x_1 < x_2, \dots$, tak hore napísali „*Charakteristika ($x_1 < x_2$)*, a potom sú jednotlivé typy monotónnosti: $f(x_1) < f(x_2), \dots$ “ Predovšetkým: čo je to *charakteristika*? Týmto slovom chceli nahradiť kratučké slovo „*Ak*“, ktoré je v matematike

jedno z najpoužívanějších? Vede to dokonca na **neprijateľný postup** pri určovaní monotónnosti, ako sa ukazuje ďalej.

Str.41, Príklad 4. „*Dokáž, že funkcia $f: y = -2x + 3$ je klesajúca.*“ Postup je opísaný v modrom bloku: „*Pre dôkaz použiješ definíciu klesajúcej funkcie, do ktorej dosadiš predpis funkcie, pričom na jednu stranu dáš rovnaký predpis a na druhú stranu nerovnice dáš za x výraz $x + 1$ a vypočítaš nerovnicu. Ak ti vyjde, že nerovnosť platí, tak je funkcia klesajúca.*“

Odhliadnime od drobnosti, že nerovnica sa nevypočíta, ale vyrieši. Absolútny nezmysel je ale časť „*dáš za x výraz $x + 1$* “. Toto autori aj zrealizujú na 5 riadkoch žltého bloku, ktorý končí nerovnosťou $0 > -2$. Potom nasleduje sivý blok, kde znovu potvrdia (takže to nie je náhoda!), že „*... namiesto x dáš $x + 1$, pretože potrebuješ zaistiť, aby x_2 bolo väčšie ako x_1 , čo urobíš vďaka pripočítaniu hodnoty 1 (môžeš v podstate použiť akékoľvek kladné číslo)*...“

K tomu je už ťažké niečo dodať. Že nejde o moje zveličovanie chyby, potvrdia autori za tým sivým blokom, keď napíšu, že „*Vyšlo, že 0 je väčšia ako mínus dva, čo platí vždy. Týmto sa úspešne dokázalo, že funkcia f je klesajúca, ...*“

42₅ „*...globálne maximum...*“ je asi len preklep, aj keď mrzutý. Má byť globálne minimum.

42₄ „*Funkcia g je ohraničená zdola číslom $a = -1$ a ich globálnym minimom je bod Min . Rovnako, ako je celé more ohraničené zdola samotným dnom.*“ Slovo *ich* je hodne máťuce, naznačuje množné číslo, a veta o mori vonkoncom nie je vhodná, dno nie je číslo. Nie je mojou úlohou ukazovať autorom príklady, ale pre lepšie pochopenie dolnej ohraničenosti by určite bolo vhodnejšie namiesto mora použiť napr. kladné čísla a nezáporné čísla. Kladné čísla nemajú globálne minimum, ale sú zdola ohraničené nulou a nezaškodilo by dodať, že aj každým záporným číslom. Čísla nezáporné majú globálne minimum 0 a samozrejme sú zdola okrem nuly tiež ohraničené každým záporným číslom. (Slovu infimum sme sa vyhlí.)

43²⁻³ „*Lokálne extrémny (lokálne maximum a minimum) sú extrémny (majú najväčšiu alebo najmenšiu hodnotu) iba pre svoje okolie (určitý interval), ale nie na celom definičnom obore.*“ Slovo *iba* naznačuje, že to nebude dobre a posledných 6 slov za čiarkou to len potvrdzuje, lebo niektorý z lokálnych extrémov môže byť globálny.

43, modrý blok: „*Nato, aby si zistil, či je funkcia ohraničená zhora, alebo zdola, musíš najskôr určiť, aké má funkcia extrémne hodnoty.*“ To, našťastie, neplatí. Existujú funkcie, o ktorých veľmi ľahko vieme dokázať, že sú ohraničené, ale ich extrémny by sme sotva dokázali určiť (prinajmenšom na úrovni strednej školy).

Napr. funkcia $f(x) = 2 \sin x - \cos \frac{\log(5 + \tan^2 x)}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 5x + 7}} + \sin(\cos(x + 2))$ je zrejme

ohraničená, lebo ihneď vidíme, že $|f(x)| \leq 6$. Ale extrémny tej funkcie by som nerád hľadal...

45⁴⁻⁵ „Párna funkcia je taká, ktorej graf je osovo súmerný podľa osi y .

Platí vzťah: $-f(x) = f(-x)$.“ Malo to byť napísané ako jedna veta takto:

„... osi y , t. j. práve vtedy, keď platí $f(-x) = -f(x)$ pre každé x z definičného oboru.“

Autorom zrejme nie sú jasné základy logiky. Keď povieme dve vety V, U za sebou s bodkou medzi nimi, tak tie ani nemusia súvisieť. Sú proste napísané za sebou. Nemáme tak dôvod myslieť si, že nejakú súvisia, a keby sme sa to aj dovätčili, tak by sme stále nemali jasno v tom, ktorú logickú spojku mali autori na mysli. Príklad dvoch výrokov za sebou: $3 + 2 = 5$. $3 - 2 = 4$. Určite nie sú ekvivalentné, súvis medzi nimi nie je. Navyše, autorom sa nezдалo dôležité napísať „... pre každé x z definičného oboru.“ Lenže bez tých pár slov je tá definícia, veľmi mierne povedané, silne neúplná. Musím upozorniť aj na **pedagogicky nesprávny postup** pri napísaní tej rovnosti, lebo táto chyba je oveľa častejšia. Pozorný čitateľ si ju už možno všimol. Správne malo byť $f(-x) = -f(x)$. Obvykle je totiž daný funkčný predpis $y = f(x)$ a zisťovanie parity začneme tak, že napíšeme $f(-x) =$, a potom počítame, teda do daného predpisu dosadíme $-x$ namiesto x . To isté pre všetky ďalšie vlastnosti.

Str. 52, spodný žltý blok (treba určiť lineárnu funkciu prechádzajúcu bodmi A, B). $A[1; 5] \rightarrow x_1 = 1, y_1 = 5$; $B[-2; -1] \rightarrow x_1 = -2, y_1 = -1$. Prečo bolo treba 4 súradnice označiť tak neprirodzene, keď ihneď potom, aj tak dosadzujú tie čísla do všeobecného tvaru $y = ax + b$ a nikde sa už tie neprirodzené indexované písmená nevyskytnú?

Str. 59, Príklad 19, ktorého výsledok je, že *doručovateľ prospektov si privyrobití 42 Euro denne*. Prosím adresu človeka, ktorý mi to zaplatí, aj ja si chcem privyrobití 42 Eur denne.

Str.64, prvý riadok sivého bloku: „*K tomu, ale potrebuješ poznať minimálne dva body, aby sa priamka dala nakresliť.*“ Pripomína mi to študenta, ktorý kolegyni na skúške z geometrie povedal, že priamka je určená dvomi bodmi, lepšie však tromi. A my sme potom mali zábavu, že ktorý človek by dokázal tromi nakreslenými bodmi viesť priamku. Toto je už ale pre autorov asi ťažšie pochopiteľné...

Str.78, posledný riadok nad príkladom 2. „*vyriešiš funkciu $y = ax^2$, ...*“ Ja naozaj neviem, čo je to vyriešiť funkciu. (Ale autori tú inštrukciu opakujú dosť často.)

Str. 125 „*Možno sa k tebe dostalo slovo „inverzná“ v spojitosti s prevrátenosťou. Tu uvidíš, že v matematike má rovnaký význam.*“ Neskôr autori uvedú definíciu inverznej funkcie. To už ale veľa nezmení na prvých dvoch vetách, kde si slabší žiak, ale možno aj ne jeden lepší, zafixoval, že „pôjde o prevrátenie“, pričom ten nezmysel mu bude našepkávať aj označenie f^{-1} zo strany 26.

131₇ „Predpis inverznej funkcie sa určí tak, že v predpise pôvodnej funkcie sa zamení x za y a vyjadri sa premenná y .“ Bolo by ale viac ako potrebné poznamenať, že po triviálnej výmene x za y môže byť enormne ťažké, ba niekedy až nemožné z predpisu $x = f(y)$ vyjadriť explicitne $y = f_{-1}(x)$.

Str. 135 $y = a^x$. Poznamenávam, že číslo a nie je koeficient! (Lebo autori to tak napísali.)

135₈ „... odmocninu zo záporného čísla mať nemôžeš.“ Otázka autorom: a čo takto $\sqrt[5]{-32}$ a všetky nepárne odmocniny?

Str. 148, druhý sivý blok odhora: „Prvú vec, ktorú je vhodné urobiť, je skrátiť zlomky do základného tvaru. Číslo 16 sa do 64 vojde štyrikrát a číslo 4 do 32 presne osemkrát. Pretože vnútro zátvorky má prednosť, tak x v mocnine prejde na samotné číslo 4.“ Tak toto má byť vysvetlenie toho, že ak $\left(\frac{64}{16}\right)^x = \frac{32}{4}$, tak $4^x = 8$. Keby som nevedel o čo ide, tak by som to dosť ťažko chápal.

154¹ Substitúcia $t = 5^x$ je **pedagogicky nevhodná**, treba prehodiť strany. Nahradzujeme totiž 5^x a nie t .

Str. 155, Príklad 8 má zavádzajúce údaje, lebo vedie na nezmyselný záver, že „za sto rokov bude na Zemi dvakrát toľko ľudí ako je teraz“. Poznamenávam, že počet obyvateľov Zeme v roku 1959 bol 3 miliardy, pričom 6 miliárd ľudí bolo už v roku 1999, teda za 40 rokov sa populácia zdvojnásobila. Kvôli lepšiemu obrazu ešte poznamenajme, že v roku 2017, teda za 2/3 storočia od roku 1950, dosiahla populácia v mnohých krajinách Afriky viac ako 5-násobok (Nigéria, Ghana, Etiópia), a v niektorých aj vyše 7-násobok (Uganda, Tanzánia, Keňa, Kongo, Sudán). Nárast v mnohých ľudnatých krajinách Ázie (Irán, Pakistan, Filipíny) za to isté obdobie bol viac ako 4-násobný a v mnohých ďalších takmer 4-násobný.

Možno väčšina úloh z pracovného zošita má správne riešenie (kontrola bola náhodná), ale samotný pracovný zošit je obrovské plytvanie papierom. Pracovné zošity vo všeobecnosti sú nepriateľom prírody a ekológie. Sú ale veľmi priaznivé pre financie autora a vydavateľa, lebo sú len na jedno použitie... O peniaze totiž ide až v prvom rade. Niekoľko poznámok ale uvediem.

25⁵ Graf potom vyrieš. Viem ako sa graf kreslí, aj to, ako sa z neho číta, ale neviem, ako sa graf rieši.

Str. 51, Príklad 6. Na základe záveru úlohy odporúčam, aby kúpili ešte jednu pohodlnú stoličku, lebo podávať 1/3 výkon by asi nikto nemal.

Str. 59, Príklad 6 je vraj pre maturitu. Maturitu koho? Žiakov ZŠ? Lebo to vidia bez rozmýšľania ...

Str. 82, Príklad 5. Ktorá banka dáva 6% ročne?

Str. 181, dole: odlogaritmovat? Zvykne sa to používať... Ale patrilo by sa aspoň raz napísať zázračný vzťah $f(f_{-1}(x)) = f_{-1}(f(x)) = x$, aby si žiak nemyslel, že

pri logaritmovaní a odlogaritmovaní sa deje zázrak. Nedeje! Ak potrebujem neznámu x a dospel som k tomu, že $x^3 = 8$, tak pouzijem prostú (!) funkciu „tretia odmocnina“ (inverznú k tretej mocnine) na obe strany a dostanem výsledok (obvykle sa povie, že odmocníme). Podobne ak potrebujem neznámu x a dospel som k tomu, že $3x = 21$, tak pouzijem prostú funkciu „delenie tromi“ (inverznú k násobeniu tromi) na obe strany a dostanem výsledok (obvykle sa povie, že vydélieme tromi). Nepochybujem, že pre mnohých to posledné vyzerá ako násilie, ktoré odmávnú tak, že „veď je to len delenie tromi“. Ale nie je to tak! Je to celkom dobrá príprava na to, že hrdý majiteľ maturitného vysvedčenia zvládne napr. z dosiahnutého výsledku $\sin x = 0,5$ určiť hodnotu x pomocou kalkulačky, na ktorej dokáže stlačiť funkciu arcsin.

Na úvod som uviedol hlavných autorov, teraz uvediem aj korektorov matematiky, ktorí matematike zrejme nerozumejú, lebo vydanie tých návodov schválili: RNDr. Vladimír Slezák, Ph.D., Mgr. Mária Hladoníková, PaedDr. Andrea Klačeková, Mgr. Milota Kallová.

Toto určite nie je učebnica. Je to návod pre veľmi slabých žiakov, ktorým podľa autorov treba niektoré triviality stále opakovať. Lenže táto metóda zaberie viac času ako sa poctivo naučiť povedzme 12 strán definícií a viet. Keď poviem, že niečo som pochopil, mám tým na mysli, že v mojom mozgu došlo k spojeniu určitých informácií, ktoré som tam mal uložené. Tvrdenie, že bifľovanie nie je k ničomu, je nezmysel: bifľovanie pestuje lekár, právnik, herec, operný spevák, ... A tvorivej práci sa môže venovať až potom, keď má niečo nabifľované, teda keď si do pamäte niečo uložil. Kým tam nič nemá, tak nemôže dôjsť k pochopeniu súvislostí a vôbec k ničomu tvorivému.

Som presvedčený, že takéto návody pre veľmi slabých žiakov by nemali vzniknúť. Keby mali návody na užitie liekov takúto kvalitu, tak by ne jeden človek umrel len kvôli návodu. Nenazývajte matematikou to, čo je takto sprznené. Pripomínam, že už na prelome 19. a 20. storočia začali veľké práce na zjednotení osnov pre stredoškólkov, aby maturita mala tú istú hodnotu od Paríža po Lemberg (dnes Lvov). Na tých prácach sa zúčastnili napr. H. Poincaré, F. Klein a podobne. Dnes si mnohí myslia, že sú od nich múdrejší. Ale toto je už iná téma.

Pohľad matematikára

Je Matika pre spolužiakov učebnicou?

Ľudmila Potočáková

Obsah publikácie Funkcie tvoria kapitoly Funkcia a jej graf, Lineárna funkcia, Kvadratická funkcia, Lineárne lomená funkcia, Mocninová funkcia, Exponenciálna a logaritmická rovnica, nerovnica a ich funkcie. Vzhľadom na názov učebnice a obsah prvých piatich kapitol, ktorý sa nezaoberal riešením rovníc a nerovníc jednotlivých typov funkcií, nebolo vhodné zaradiť do poslednej kapitoly problematiku týkajúcu sa riešenia exponenciálnych a logaritmických rovníc a nerovníc. Ak cieľom autorov učebnice bolo oboznámiť žiakov s problematikou funkcií, tak celá mala byť zameraná len na funkcie a všetky typy rovníc a nerovníc bolo treba zhrnúť do osobitnej publikácie alebo zmeniť koncepciu a pri každom type funkcie uviesť aj spôsoby riešenia príslušných rovníc a nerovníc.

Autori rozčlenili publikáciu nápadito, použili príjemné farby a grafiku. Rozdelili ju do šiestich kapitol a každú kapitolu na niekoľko častí (celkom 15).

Každá časť kapitoly začína úvodným slovom zameraným na motiváciu. V úvode piktogramom smerovník sa autori snažili objasniť, čo je jeho obsahom (Čo ma čaká?), piktogramom raketa, kde sa daná problematika dá využiť v praxi (Využijeme to niekedy?, Načo mi to bude?, Funkcia funkcií v praxi, ...) a piktogramom *prepletené šípky*, pre ktorú ďalšiu matematickú časť je dôležité preberanú problematiku dobre ovládať (Funkčná matika). Napríklad v kapitole 2 v časti 2 na strane 63 sa uvádza: „*Absolútna hodnota je ako lepiaca páska alebo WD-40. Dá sa vopchať skoro kamkoľvek.*“

Zámer autorov motivovať žiakov k naštudovaniu príslušnej problematiky bol výborný, ale jeho realizácia v niektorých častiach pokrívava. Text je málo premyslený po obsahovej stránke a amatérsky zoštylizovaný. Napríklad na strane 135 v kapitole 6 v časti 1 v odseku Ako to súvisí s **posledným učivom?** je napísané: „*Exponenciálne funkcie sú neodmysliteľne spojené s logaritmickými funkciami...*“, pritom o logaritmickú funkciu sa žiaci dozvedia až v časti 4. Možno autori mysleli na nasledujúce učivo, ale napísali slovo posledné. Na strane 50 v kapitole 2 v časti 1 s názvom Graf lineárnej funkcie a jej vlastnosti je úvodná motivácia pomenovaná **Nie je krivka ako krivka, Využitie krivky v živote**, pritom grafom lineárnej funkcie je priamka. Úvahu o krivkách by bolo vhodnejšie zaradiť do 1. kapitoly do 1. časti pod názvom Základy funkcií, v ktorej mohli autori spomenúť, že graf funkcie sa dá nakresliť v tvare krivky alebo priamky alebo izolovaných bodov. Na strane 76 v kapitole 3 v časti 1 s názvom Graf kvadratickej funkcie a jej vlastnosti pod

otázkou Čo ma čaká? je uvedené: „Dôležité budú aj vlastnosti, ktoré sa dobre určujú z obrázka.“ Aký obrázok autori mysleli?

Za úvodom každej časti kapitoly nasleduje vysvetľovanie problematiky. Autori sa snažili opísať teóriu obrazne a jazykom blízkym žiakom, väčšinou neuviedli presné matematické definície, vety, označenia a dopustili sa mnohých nepresností v pojmoch a popisoch postupov riešení úloh.

Napríklad pri objasňovaní párnej a nepárnej funkcie na strane 37 uviedli: „*Párna funkcia musí byť osovo súmerná podľa osi y.*“ Nemal by byť graf párnej funkcie súmerný podľa osi y ? Alebo tiež na strane 37 pri opise, ako dokázať, že funkcia je párna, napísali: „...*Vo všeobecnosti sa to dokazuje tak, že pred všetky x vo funkcii dáš záporné znamienko a po úprave musí vyjsť rovnaká funkcia, ...*“ Je správne vyjadrenie, že pred všetky x vo funkcii dáš záporné znamienko? S čím by mala vyjsť funkcia rovnaká? Na strane 42 pod názvom Takže už aj funkcia môže byť ohraničená! autori napísali: „*Tak ako pri ohraničenosti zhora aj tu platí, že ak má funkcia globálny extrém, tak je zdola ohraničená. Tentokrát je ním však **globálne maximum**, teda $a \leq f(x)$ pre všetky x z $D(f)$.*“ Je to zrozumiteľné a správne? Na strane 76 uviedli, že: „*Kvadratická funkcia je funkcia, ktorá má v predpise neznámu x^2 (a v žiadnej inej mocnine).*“ Nemalo by byť napísané, že kvadratická funkcia je funkcia, ktorej predpis obsahuje kvadratický člen x^2 ? Na strane 20 v kapitole 1 v časti 1 v popise riešenia príkladu 4b: „*Urč také x , pre ktoré platí: $f(x) = 2$* “ autori uviedli: „*Podobne ako v predchádzajúcom príklade nájdeš hodnotu 2 na osi y . Potom na vodorovnej kolmici nájdeš body, ktoré budú riešením príkladu. Je dôležité si uvedomiť, že výsledkom nemusí byť len vypísanie hodnôt, ale výsledkom môže byť aj interval.*“ Nie je pojem „vodorovná kolmica“ zvláštny a vyjadrenie o výsledku nejasné? Na strane 17 pod názvom Funkcie sú maľovanky opísali autori ako zostrojiť graf funkcie slovami: „*Body so súradnicami $[x; y]$ potom zakrešíš do grafu a spojíš čiarou.*“ Nezakrešujú sa body do súradnicového systému a z nich vytvárame graf?

Nie všetky teoretické časti spracovali autori vyčerpávajúco podľa názvu časti kapitoly. Napríklad v kapitole 1 s názvom Základy funkcií v časti 1 na strane 15 pod názvom Ako sa zapisuje? by sa dalo očakávať, že budú uvedené všetky možnosti zadania funkcie. Autori sa zamerali na zápis funkcie pomocou rovnice, tabuľku a vymenovanie usporiadaných dvojíc len spomenuli, ale neukázali ako takýto zápis funkcie vyzerá. V spomínanej kapitole sa mohli autori problematike venovať komplexnejšie, zaoberať sa pojmom funkcie, spôsobmi jej zadania, definičným oborom a oborom hodnôt. V časti 2, ktorú mohli nazvať Graf funkcie mohli pokračovať vysvetlením zostrojovania grafov a určovaním oborov funkcie pomocou nich. Zaradenie popisu určovania definičného oboru do prvej časti kapitoly a príkladov na precvičenie do druhej časti je neprehľadné a nekonceptné. Podobne by

bolo vhodnejšie zaradiť problematiku o prostej a inverznej funkcii do časti 3 s názvom Vlastnosti funkcií ako ju uvádzať pri určovaní oboru hodnôt.

Naopak niektoré témy uviedli autori nad rámec stredoškolskej matematiky. Napríklad teóriu o inflexných bodoch, konkávnej a konvexnej funkcii sa žiaci gymnázia dozvedajú len na seminároch zameraných na prípravu na vysoké školy, lebo nie sú v súlade so štátnym vzdelávacím programom, ani s cieľovými požiadavkami na maturitnú skúšku.

Na rôznych stranách publikácie autori popísali ten istý pojem nesynonymickým vyjadrením. Napríklad v kapitole 1 v časti 1 na strane 14 je funkcia vysvetlená nasledovne: „Funkcia je zobrazenie množiny A (množina vzorov x) do množiny B (množina obrazov y). Funkcia každému x priradí **práve** jedno y .“, ale na strane 22 vo Funkčnom zhrnutí je uvedené: „Funkcia f je zobrazenie x na y . Každé x má **maximálne** jedno y .“ Sú obidve vysvetlenia správne?

Každá časť kapitoly je ukončená zhrnutím (Zhrnutie, Funkčné zhrnutie, ...), príkladmi na precvičenie (Precvičenie) a výsledkami ich riešení (Výsledky).

V Zhrnutí autori uviedli prehľad matematických pojmov, o ktorých bola v kapitole reč a ich stručnú charakteristiku. Nápad dobrý, ale opäť nedotiahnutý. Niektoré pojmy sú akože zadefinované len slovné, napríklad v kapitole 1 v časti 3 na strane 45 je uvedené: „Ohraničenosť: Zhora – existuje také číslo, že všetky funkčné hodnoty sú menšie alebo rovné tomuto číslu.“, niektoré pomocou matematických pojmov, napríklad: „Monotónnosť sa delí pri predpoklade $x_1 < x_2$ na: Rastúca: $f(x_1) < f(x_2)$ “ a niektoré aj nesprávne, napríklad: „Minimum $M[x_0; f(x_0)]$ je najmenšia funkčná hodnota danej funkcie.“ Na strane 72 je napísané: „Absolútna hodnota v grafe funkcie znamená, že prevedieš všetky hodnoty pod osou x cez osovú súmernosť podľa osi x hore, teda nad os x .“ Prevádza sa len koza cez cestu, nie x cez osovú súmernosť. Uvedená formulácia matematického pojmu je nevhodná až tragická. Ak má mať zhrnutie problematiky svoju vážnosť a pomôcť žiakovi pri riešení úloh, malo by byť urobené odborne, dôsledne, jedným štýlom a bez chýb.

Príklady na precvičenie sú vhodne zvolené, pestré a možno ich využiť na precvičenie príslušnej problematiky. Výsledky sú prehľadné a zrozumiteľné, žiaci si môžu pomocou nich overiť správnosť vlastných výpočtov. Jedinou pripomienkou by mohlo byť, že zvykom na strednej škole je zadávať úlohy v 2. osobe množného čísla (Zostrojte, Vypočítajte, ...).

Podstatnou výhradou je, že v publikácii sa nachádza z češtiny veľa nesprávne preložených alebo nepreložených slov. Čím čitateľ postupuje v listovaní ďalej, tým sa ich vyskytuje viac. Napríklad: „... v predpise **prohodiš** x a y , ...“ (str. 32), „...čo **zaisťíš** tak, že **vytkneš** pri oboch x hodnotu 2.“ (str. 77), „**Preved'** všeobecný tvar funkcií na vrcholový:“ (str. 85), „...obor hodnôt sú všetky reálne čísla okrem dvoch, tzn. $H = R - \{2\}$.“ (str. 104), ...

Cieľom matematického vzdelávania by malo byť, aby žiak získal odborné poznatky, vedel ich efektívne využiť pri riešení rôznych matematických úloh i v praxi a ovládal správnu terminológiu, aby porozumel textu v akejkoľvek matematickej literatúre. K jeho dosiahnutiu je potrebné vytvárať a používať kvalitný učebný materiál, prepracovaný, doladený.

Autori publikácie sa snažili do učenia matematiky vniesť svieži vietor. Ich snaha a nápad sa cení, ale chýba im precíznosť a prax. Podobne ako pracovný zošit je aj učebnica *Matika pre spolužiakov* využiteľná len ako doplnujúci materiál, zameraný na precvičovanie príkladov na danú tému za predpokladu, že teoretickú časť skoriguje učiteľ matematiky. Vzhľadom na amatérsky zoštylizované texty, neodborné a v mnohých prípadoch nesprávne matematické vyjadrenia nemožno publikáciu pokladať za serióznou učebnicu a odporučiť ju ako učebnú pomôcku.

L i t e r a t ú r a

- [1] <http://web.science.upjs.sk/jozefdobos/wp-content/uploads/2018/11/Jasna50.pdf>
- [2] Liška, M., Valenta, T., Král, L. a kol.: *Matika pre spolužiakov. Funkcie*, PreSpolužiakov.sk s. r. o., 2018. ISBN 978-80-89960-06-4

Adresa autorov: Vojtech Bálint, Nám. L. Fullu 21, 01008 Žilina,
e-mail: vojtech.balint@gmail.com
Ludmila Potočáková, Gymnázium, Varšavská cesta 1, 010 08 Žilina.
e-mail: ludkapotocakova@gmail.com

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2021 ročník 50

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková

Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 550 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: apríl 2021

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

OBSAH

Michal K ř í ž e k : O paradoxu dvojčat.....	1
Roman K l u v a n e c : Tvorba melodií pomocou harmonických postupností	11
Zadania úloh 7. ročníka Matematickej olympiády (Stanislav Krajčí).....	19
Ildikó B a j k ó : Fyzika chaosu na stredných školách Materiál použiteľný pri online vyučovaní	22
Boris L a c s n ý , Aba T e l e k i : Experimenty s časom – podobné systémy	35
Texty úloh 1. kola 63. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk.r. 2021-2022) kategórie E, F, G	40
JUBILEUM	
Doc. RNDr. Pavol Grešák, CSc. sa dožíva významného životného jubilea.. SPOMÍNANIE	54
Život a dielo profesora Martina Gavalca (1942-2021)	57
RECENZIA	
Vojtech B á l i n t , Ľudmila P o t o č á k o v á : Vyjadrenie k „učebnici“ Marek Liška a kol.: Matika pre spolužiakov - Funkcie	60

CONTENTS

Michal K ř í ž e k : The Twin Paradox	1
Roman K l u v a n e c : Generating Melodies with Respect to a Chord Progression	11
Tasks of the 71 st Mathematical Olympiad (Stanislav Krajčí)	19
Ildikó B a j k ó : Chaos Physics in Secondary School A Material Applicable in Online Teaching	22
Boris L a c s n ý , Aba T e l e k i : Experiments with Time – Similar Systems	35
Tasks of the First Round of the 63 rd Physics Olympiad (School Year 2021-2022) Categories E, F, G.....	40
JUBILEES	
Associate Professor Pavol Grešák's Jubilee	54
REMEMBRANCE	
The Life and Work of Professor Martin Gavalec (1942-2021).....	57
REVIEW	
Vojtech B á l i n t , Ľudmila P o t o č á k o v á : Statement on the "Textbook" Marek Liška et al. : Math for Classmates – Functions	60