Slovenská akadémia vied
matematický ústav

Frakcionálne diferenciálne rovnice

Report zo stáže

Bratislava 2018
Bc. Ivana Eliašová
Prof. RNDr. Michal Fečkan, DrSc.

Obsah

Úvod

Frakcionálny diferenciálny a integrálny počet je oblasť matematickej analýzy, ktorá sa zaoberá deriváciami a integrálmi neceločíselného rádu. Je známe, že posledných rokoch stúpa záujem o frakcionálny diferenciálny počet kvôli jeho širokej aplikácii v rôznych oblastiach.

Prvá zmienka o existencii frakcionálnej derivácie pochádza už z roku 1695, kedy ako prvý opísal frakcionálnu deriváciu polovičného rádu Leibniz v liste adresovanom l'Hospitalovi. Odvtedy teória frakcionálneho diferenciálneho počtu priťahuje pozornosť množstva matematikov, ale rovnako aj fyzikov, biológov a ekonómov.

Prvou známou aplikáciou frakcionálneho diferenciálneho počtu je riešenie tautochrony skonštruované Abelom v roku 1823. Iné aplikácie frakcionálneho diferenciálneho počtu sú napríklad aj v biofyzike, kvantovej mechanike, teórii grúp alebo aj v ekonómii.

Táto práca vznikla počas letnej stáže na Matematickom ústave Slovenskej Akadémie Vied v júli a auguste 2018. V práci sa zaoberám úvodom do teórie frakcionálneho diferenciálneho počtu a do frakcionálnych diferenciálnych rovníc. Práca je rozdelená na tri kapitoly. Teoretický základ, ktorý som počas stáže nadobudla, ďalej využívam pri písaní diplomovej práce.

Prvá kapitola práce je venovaná definíciám rôznych typov frakcionálnych derivácií a integrálov. Konkrétne sa budeme venovať Grünwaldovej-Letnikovovej, Riemannovej-Liouvillovej a Caputovej frakcionálnej derivácii. Opíšeme ich základné vlastnosti a rozdiely medzi nimi.

V druhej kapitole opíšem Laplaceovu transformáciu, ktorá je silným nástrojom pri riešení konkrétnych typov frakcionálnych diferenciálnych rovníc. Popíšem Mittagovu-Lefflerovu funkciu, ktorá úzko súvisí s riešením frakcionálnych diferenciálnych rovníc pomocou metódy Laplaceovej transformácie. Taktiež sa budem venovať dôkazu Postačujúcej podmienky existencie a jednoznačnosti riešenia frakcionálnej diferenciálnej rovnice pomocou metódy Laplaceovej transformácie.

Tretia kapitola pozostáva z príkladov. Opíšem postup riešenia frakcionálnej diferenciálnej rovnice pomocou metódy Laplaceovej transformácie na niekoľkých konkrétnych príkladoch.

Poďakovanie

Na tomto mieste by som sa rada poďakovala prof. RNDr. Michalovi Fečkanovi, DrSc. za ochotu, cenné rady ako aj za odbornú pomoc pri písaní práce. Taktiež by som rada poďakovala Matematickému ústavu Slovenskej Akadémie Vied za možnosť zúčastniť sa stáže, za ochotu a prístup pracovníkov.

Kapitola 1

Frakcionálny diferenciálny počet

V prvej kapitole sa budeme venovať úvodu do frakcionálneho diferenciálneho počtu, opíšeme viaceré typy frakcionálnych derivácií a ich vlastnosti. Na rozdiel od klasickej derivácie, frakcionálnych derivácií existuje niekoľko, pričom ich definície nie sú vo všeobecnosti úplne ekvivalentné.

Pri definícii frakcionálnej derivácie je prirodzené očakávať, že bude spĺňať nasledujúce podmienky:

- Frakcionálna derivácia je lineárny operátor.
- Frakcionálna derivácia celočíselného rádu je rovnaká, ako obyčajná derivácia.
- Frakcionálna derivácia nultého stupňa je identita.
- $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$.
- Frakcionálna derivácia spĺňa zovšeobecnené Leibnizovo pravidlo

$$D^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} D^i f(t) D^{\alpha-i} g(t).$$

1.1 Grünwaldova-Letnikovova frakcionálna derivácia

Definícia 1.1. Nech $\alpha > 0$, $t > a$, $\alpha, t, a \in \mathbb{R}$. Operátor

$$ {}_{a}^{GL}D_t^\alpha f(t) := \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)} f(x-kh) \tag{1.1}$$

budeme nazývať Grünwaldovou-Letnikovovou frakcionálnou deriváciou stupňa α funkcie f v bode t.

Základné vlastnosti

- Operátor ${}^{GL}_{a}D^{\alpha}_{t}$ je lineárny.
- ${}^{GL}_{a}D^{0}_{t}$ je identický operátor, teda
$$ {}^{GL}_{a}D^{0}_{t}f(t) = f(t). $$
- Pre $\alpha = n \in \mathbb{N}$ platí:
$$ {}^{GL}D^{n}_{t}f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}f(t-kh)}{h^{n}} = \frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}} $$
- Aditivita a komutativita:
$$ {}^{GL}D^{\alpha}_{t}[{}^{GL}D^{\beta}_{t}f(t)] = {}^{GL}D^{\beta}_{t}[{}^{GL}D^{\alpha}_{t}f(t)] = {}^{GL}D^{\alpha+\beta}_{t}f(t). $$

1.2 Riemannova-Liouvillova frakcionálna derivácia

Definícia 1.2. Nech $\alpha > 0$, $t > a$, $\alpha, t, a \in \mathbb{R}$. Frakcionálny operátor

$$ J^{\alpha}_{a+}f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau \tag{1.2} $$

resp. frakcionálny operátor

$$ J^{\alpha}_{b-}f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{b} f(\tau)(\tau-t)^{\alpha-1}d\tau \tag{1.3} $$

budeme nazývať ľavý (resp. pravý) Riemannov-Liouvillov frakcionálny integrál stupňa α.

Poznámka 1.1. *Ak nebude uvedené inak, pod označením J^{α} budeme myslieť ľavý frakcionálny integárl J^{α}_{a+}.*

Definícia 1.3. Nech $\alpha > 0$, $t > a$, $\alpha, t, a \in \mathbb{R}$. Potom budeme operátor

$$ {}_{a}D^{\alpha}_{t}f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{a}^{t} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau & \text{pre } n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t) & \text{pre } \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.4} $$

nazývať Riemannov-Liouvillov frakcionálny diferenciálny operátor, respektíve Riemannova-Liouvillova frakcionálna derivácia stupňa α funkcie f v bode t.

Poznámka 1.2. *Operátor ${}_{a}D^{\alpha}_{t}$ môžeme v prípade funkcií jednej premennej označovať ${}_{a}D^{\alpha}$.*

Základné vlastnosti

- J^0 aj ${}_aD_t^0$ sú identické operátory, teda

$$J^0 f(t) = f(t),$$

$${}_aD^0 f(t) = f(t).$$

- J^α aj ${}_aD_t^\alpha$ sú lineárne operátory, teda

$$J^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda J^\alpha f(t) + J^\alpha g(t),$$

$${}_aD_t^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda_a D_t^\alpha f(t) +_a D_t^\alpha g(t),$$

pre $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$.

- Ak $f(t)$ je pre $t > 0$ spojitá funkcia, platia rovnosti:

$$\lim_{\alpha \to 0} J^\alpha f(x) = f(x),$$

$$J^\alpha(J^\beta f(t)) = J^\beta(J^\alpha f(t)) = J^{\alpha+\beta} f(t)$$

pre $\alpha, \beta > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Operátor ${}_aD_t^\alpha$ je ľavý inverzný operátor k operátoru J^α, teda

$${}_aD_t^\alpha J^\alpha = I.$$

- Ak $\alpha > 0$ a $\beta > 0$, potom

$${}_aD^\alpha J^\alpha f(t) = J^{\alpha-\beta} f(t).$$

- Pre $\alpha = n \in \mathbb{N}$ platí:

$$D_t^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}.$$

1.3 Sekvenčná frakcionálna derivácia

Definícia 1.4. Nech $\sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$ pre $j = 1, 2, ...k$. Potom operátor

$${}_aD_t^{\sigma_k} = {}_aD_t^{\alpha_k}\, {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} ... {}_aD_t^{\alpha_1} \tag{1.5}$$

budeme nazývať Millerova-Rossova frakcionálna derivácia, respektíve sekvenčná frakcionálna derivácia stupňa σ_k.

1.4 Caputova frakcionálna derivácia

Definícia 1.5. Nech $\alpha > 0$, $t > a$, $\alpha, t, a \in \mathbb{R}$. Potom operátor

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau & \text{pre } n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \text{pre } \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.6} $$

budeme nazývať Caputov frakcionálny diferenciálny operátor, respektíve Caputova frakcionálna derivácia stupňa α funkcie f v bode t.

Definícia 1.6. Caputova frakcionálna derivácia stupňa α pre $0 < \alpha < 1$ funkcie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ je definovaná vzťahom:

$$ {}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0 D_t^\alpha [f(t) - f(0)]. $$

Základné vlastnosti

- Operátor ${}_a^C D_t^\alpha$ je lineárny. Je splnená podmienka aditivity a komutativity.
- Operátor ${}_a^C D_t^0 f(t)$ je identický operátor.
- Pre $\alpha = n \in \mathbb{N}$ platí:
$$ {}_a^C D_t^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}. $$
- Derivácia súčinu:

$$ {}^C D_t^\alpha [\phi(t)\psi(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \phi^{(n)}(t) {}^C D_t^{\alpha-n} \psi(t) + \frac{(t-a)^{-n}}{\Gamma(1-n)} \phi(a)(\psi(t) - \psi(a)) + $$
$$ + (D^n \phi(t))\psi(t). $$

Príklad 1.1. Nájdime Caputovu frakcionálnu deriváciu rádu $\alpha = \frac{1}{2}$ funkcie $f(t) = t$. Z definície Caputovej frakcionálnej derivácie:

$$ {}_0^C D^{1/2} t = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}+1-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}. $$

Nájdime ďalej deriváciu rádu $\alpha = \frac{1}{2}$ funkcie $\frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}$:

$$ \frac{2}{\sqrt{\pi}} {}_0^C D^{1/2} t^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}} (t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \frac{1}{\pi} (\arcsin(1) - \arcsin(0)) = 1. $$

Je vidieť, že po dvojnásobnom aplikovaní derivácie rádu $\frac{1}{2}$ sme dostali presne prvú deriváciu funkcie $f(t)$.

Rozdiel medzi Caputovou a Riemannovou-Liouvillovou frakcionálnou deriváciou

Nech je f taká funkcia, že Caputova aj Riemannova-Liouvillova frakcionálna derivácia funkcie f rádu α existujú. Potom vo všeobecnosti platí:

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) \neq {}_a D_t^\alpha f(t). $$

Pre Caputovu frakcionálnu deriváciu rádu α platí nasledujúce tvrdenie:

Veta 1.1. *Nech* $n-1<\alpha<n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, potom*

$$ \lim_{\alpha \to n} {}_a^C D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), $$

$$ \lim_{\alpha \to n-1} {}_a^C D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). $$

Dôkaz. Využijeme integráciu per partes.

$$ {}_a^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-f^{(n)}(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}) \Big|_a^t - \int_a^t -f^{(n+1)}(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} d\tau) = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} (f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha} + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha} d\tau) $$

Limitným prechodom $\alpha \to n$ dostaneme:

$$ \lim_{\alpha \to n} {}_a^C D^\alpha f(t) = (f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau) = f^n(t). $$

Limitným prechodom $\alpha \to n-1$ a použitím metódy per partes dostaneme:

$$ \lim_{\alpha \to n-1} {}_a^C D^\alpha f(t) = (f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)(t-\tau) d\tau) = f^n(a)t + f^{(n)}(t-\tau) \Big|_a^t + \int_a^t f^{(n)}(\tau) d\tau = $$

$$ = f^{(n-1)}(\tau) \Big|_a^t = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a). $$

$\square$

V prípade Riemannovej-Liuvillovej frakcionálnej derivácie platia vzťahy:

$$ \lim_{\alpha \to n} {}_a D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), $$

$$\lim_{\alpha \to n-1} {}_aD^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t).$$

Môžeme vidieť, že Riemannova-Liuvillova frakcionálna derivácia sa nerovná Caputovej v prípade, že $f^{(n-1)}(a) \neq 0$.

Kapitola 2

Laplaceova transformácia

V druhej kapitole sa budeme venovať Laplaceovej transformácii, ktorá je silným nástrojom pri riešení určitých typov frakcionálnych diferenciálnych rovníc. Dokážeme Postačujúcu podmienku existencie a jednoznačnosti riešenia frakcionálnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami metódou Laplaceovej transformácie.

Definícia 2.1. Laplaceovou transformáciou n-rozmernej vektorovej funkcie $f(t)$ budeme nazývať funkciu

$$L[f(t)](s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

ak integrál konverguje.

Veta 2.1 (Postačujúca podmienka existencie Laplaceovej transformácie). *Nech funkcia $f(t)$ je po častiach spojitá na intervale $[0, \infty)$ a nech existujú kladné konštanty T, M, c také, že $|f(t)| \leq Me^{ct}$ pre $t \geq T$. Potom existuje Laplaceova transformácia funkcie f pre $s > c$.*

Základné vlastnosti Laplaceovej transformácie

- Laplaceova transformácia je lineárny operátor, teda

  $$L[af + bg](s) = aL[f](s) + bL[g](s),$$

  pre $a, b \in \mathbb{C}$.

- Ak sú $f, f', ...f^{(n)}$ spojité a $|f(t)| \leq Me^{ct}$ pre vhodné konštanty, potom existuje $L[f^{(n)}]$ a platí:

  $$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - s^{n-1} f(0) - ... - s^0 f^{(n-1)}(0).$$

- Laplaceova transformácia konvolúcie funkcií f a g, spĺňajúcich $|f(t)| \leq Me^{ct}$

a $|g(t)| \leq Me^{ct}$:
$$L[f * g](s) = L[f](s).L[g](s),$$
pre $s > c$.

2.1 Mittagova-Lefflerova funkcia

Definícia 2.2. Mittagova-Lefflerova funkcia dvoch parametrov $\alpha > 0$, $\beta > 0$ je definovaná vzťahom:
$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$
pre $z \in \mathbb{C}$.

Veta 2.2 (Laplaceova transformácia Mittagovej-Lefflerovej funkcie)**.** *Nech čísla $\alpha, \beta > 0$ a matica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, potom*
$$L[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)] = s^{\alpha-\beta}(s^\alpha - A)^{-1}$$
platí pre také s, kde $\Re(s) > \|A\|^{1/\alpha}$.

Dôkaz. Ak $\Re(s) > \|A\|^{1/\alpha}$, tak platí $\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} = (s^\alpha - A)^{-1}$. Potom
$$L[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)] = L\left[t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k L[t^{\alpha k+\beta-1}]}{\Gamma(\alpha k+\beta)} =$$
$$= s^{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} = s^{\alpha-\beta}(s^\alpha - A)^{-1}.$$
□

Lema 2.1. *Mittagova-Lefflerova funkcia tvaru $E_{\alpha,1}(\omega t^\alpha)$ spĺňa nerovnosť:*
$$E_{\alpha,1}(\omega t^\alpha) \leq Ce^{\omega^{1/\alpha}t},$$
kde $t \geq 0, \omega \geq 0, 0 < \alpha < 2$ a C je kladná konštanta.

Príklady Mittagovej-Lefflerovej funkcie pri konkrétnej voľbe parametrov
$$E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$
$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z$$
$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z-1}{z}$$

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z})$$
$$E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$
$$E_{1/2,1}(\sqrt{z}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z} \operatorname{erf}(-\sqrt{z})$$

Kde funkcia $\operatorname{erf}(x)$ označuje Gaussovu chybovú funkciu, ktorá je definovaná nasledovne:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

V špeciálnom prípade, ak bude parameter $\beta = 1$, budeme o Mittagovej-Lefflerovej funkcii hovoriť ako o funkcii jedného parametra α.

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_\alpha(z).$$

2.2 Laplaceova transformácia frakcionálnych derivácií

Riemannov-Liouvillov frakcionálny integrál

Pri Laplaceovej transformácii Riemannovho-Liouvillovho frakcionálneho integrálu stupňa α pre $a = 0$ sa na integrál môžeme pozerať ako na konvolúciu funkcií Φ a f, kde $\Phi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.
Laplaceova transformácia konvolúcie dvoch funkcií f a Φ je rovná súčinu Laplaceovej transformácie funkcie f a Laplaceovej transformácie funkcie Φ.

$$L[f * \Phi](s) = L[f](s).L[\Phi](s).$$

$$L[\Phi(t)](s) = L[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}](s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L[t^{\alpha-1}](s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} = s^{-\alpha}$$

Z toho

$$L[J^\alpha f(t)](s) = s^{-\alpha} L[f(t)](s). \tag{2.1}$$

Riemannova-Liouvillova frakcionálna derivácia

Laplaceovu transformáciu Riemannovej-Liouvillovej frakcionálnej derivácie stupňa α pre $a = 0$ je možné vyjadriť priamo zo vzťahu na Laplaceovu transformáciu n-tej derivácie funkcie f.

$$L[{}_0D^{\alpha}f(t)](s) = s^{\alpha}L[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k[{}_0D^{\alpha-k-1}f(t)]_{t=0}, \quad n-1 < \alpha < n. \tag{2.2}$$

Sekvenčná frakcionálna derivácia

Laplaceova transformácia sekvenčnej (resp. Millerovej-Rossovej) frakcionálnej derivácie stupňa σ_m pre $a = 0$ je určená vzťahom:

$$L[{}_0D^{\sigma_m}f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st}{}_0D^{\sigma_m}f(t)dt = s^{\sigma_m}L[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}[{}_0D^{\sigma_{m-k}-1}f(t)]_{t=0}. \tag{2.3}$$

Caputova frakcionálna derivácia

Laplaceova transformácia Caputovej frakcionálnej derivácie funkcie f stupňa α pre $a = 0$ je daná vzťahom:

$$L[{}_0^CD_t^{\alpha}f(t)](s) = s^{\alpha}L[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}[f^{(k)}(t)]_{t=0}, \quad n-1 < \alpha < n. \tag{2.4}$$

V dôkaze identity (2.4) využijeme pomocné tvrdenie:

Nech $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ a $f(t)$ je taká funkcia, že existuje jej Caputova frakcionálna derivácia rádu α. Potom

$$_a^CD^{\alpha}f(t) = J^{n-\alpha}{}_aD^nf(t). \tag{2.5}$$

Toto tvrdenie priamo vyplýva z definície Caputovej frakcionálnej derivácie.

Označme teraz $g(t) =_0 D^nf(t)$. Vzťah (2.5) môžeme prepísať ako

$$_0^CD^{\alpha}f(t) = J^{n-\alpha}g(t).$$

Preto platí:

$$L[{}_0^CD^{\alpha}f(t)](s) = L[J^{n-\alpha}g(t)](s).$$

Laplaceovu transformáciu pravej strany môžeme určiť priamo podľa (2.1):

$$L[{}_0^CD^{\alpha}f(t)](s) = s^{\alpha-n}L[g(t)](s) = s^{\alpha-n}L[{}_0D^nf(t)](s)$$

Nakoľko frakcionálna derivácia n-tého je rovná obyčajnej n-tej derivácii, môžeme pri úprave pravej strany využiť vzťah na výpočet Laplaceovej transformácie n-tej derivácie funkcie.

Po úprave dostaneme vzťah pre Laplaceovu transformáciu Caputovej frakcionálnej derivácie:

$$L[{}_0^C D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha L[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}[f^{(k)}(t)]_{t=0}.$$

2.3 Postačujúca podmienka existencie a jednoznačnosti riešenia frakcionálnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami metódou Laplaceovej transformácie

Poznámka 2.1. *Z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc je známe, že ak $x(t)$ je riešením počiatočnej úlohy*

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0, \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

potom $x(t)$ rieši aj integrálnu rovnicu

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Analogický vzťah platí aj v prípade frakcionálnych diferenciálnych rovníc. Ak $x(t)$ je riešením počiatočnej úlohy

$$\begin{aligned} &{}_0D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < \alpha < 1, t \geq 0, \\ &x(0) = x_0, \end{aligned}$$

potom je $x(t)$ riešením aj integrálnej rovnice

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Lema 2.2. [2] Nech $b \geq 0, \beta > 0$ a $a(t)$ je nezáporná funkcia, ktorá je na intervale $[0, T)$ pre nejaké $T \leq \infty$ lokálne integrovateľná. Nech $u(t)$ je nezáporná a lokálne integrovateľná funkcia na intervale $[0, T)$ a nech na tomto intervale platí:

$$u(t) \leq a(t) + b \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)ds.$$

Potom

$$u(t) \leq a(t) + \theta \int_0^t F'_\beta(\theta(t-s))a(s)ds, \quad 0 \leq t < T,$$

kde

$$\theta = (b\Gamma(\beta))^{1/\beta}, \quad F_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}, \quad F'_\beta(z) = \frac{d}{dz}F_\beta(z),$$

$$F'_\beta(z) \simeq \frac{z^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \quad \textit{pre} \quad z \to 0+,$$

$$F'_\beta(z) \simeq \frac{e^z}{\beta} \quad \textit{pre} \quad z \to +\infty.$$

Ak $a(t) \equiv a$ je konštanta, potom $u(t) \leq \alpha F_\beta(\theta t)$.

Majme počiatočnú úlohu

$$\begin{aligned} &{}_0D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t), \quad 0 < \alpha < 1, t \geq 0, \\ &x(0) = \eta, \end{aligned} \tag{2.6}$$

kde A je $n \times n$ číselná matica a $f(t)$ je spojitá $n-$rozmerná vektorová funkcia.

Veta 2.3. [2] [Postačujúca podmienka existencie a jednoznačnosti riešenia frakcionálnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami metódou Laplaceovej transformácie] Nech má úloha (2.6) jednoznačne určené spojité riešenie $x(t)$. Ak je funkcia $f(t)$ spojitá a exponenciálne ohraničená na intervale $[0, \infty)$, potom je riešenie $x(t)$ aj jeho Caputova derivácia ${}_0^CD_t^\alpha x(t)$ exponenciálne ohraničená a teda existujú ich Laplaceove transformácie.

Dôkaz. Z exponenciálnej ohraničenosti funkcie $f(t)$ vyplýva existencia dostatočne veľkej kladnej konštanty T a kladných konštánt M, σ takých, že $\|f(t)\| \leq Me^{\sigma t}$ pre všetky $t \geq T$.

Z Poznámky 2.1 môžeme vidieť, že ak $x(t)$ je riešením úlohy (2.6), potom rieši aj ekvivalentnú integrálnu rovnicu

$$x(t) = \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[Ax(\tau) + f(\tau)]d\tau, \quad 0 \leq t < \infty. \tag{2.7}$$

Pre $t \geq T$ môžeme integrálnu rovnicu (2.7) prepísať do tvaru

$$x(t) = \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-\tau)^{\alpha-1}[Ax(\tau) + f(\tau)]d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1}[Ax(\tau) + f(\tau)]d\tau.$$

Z predpokladov Vety 2.3 je riešenie $x(t)$ jednoznačne určené a spojité na $[0, \infty)$. Potom $Ax(t) + f(t)$ je ohraničená funkcia na intervale $[0, T]$, teda existuje konštanta $K > 0$

taká, že $\|Ax(t) + f(t)\| \leq K$. Na základe tejto nerovnosti môžeme odhadnúť $\|x(t)\|$:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq \|\eta\| + \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|A\| \|x(\tau)\| d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Prenásobením nerovnice funkciou $e^{-\sigma t}$ a využitím nerovností:

$$e^{-\sigma t} \leq e^{-\sigma T}, \quad e^{-\sigma t} \leq e^{-\sigma \tau}, \quad \|f(t)\| \leq M e^{\sigma t} \quad (t \geq T)$$

dostávame

$$\begin{aligned} \|x(t)\| e^{-\sigma t} &\leq \|\eta\| e^{-\sigma t} + \frac{K e^{-\sigma t}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{e^{-\sigma t}}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|A\| \|x(\tau)\| d\tau + \\ &+ \frac{e^{-\sigma t}}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \|\eta\| e^{-\sigma T} + \frac{K e^{-\sigma t}}{\alpha \Gamma(\alpha)} (t^\alpha - (t-T)^\alpha) + \frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|x(\tau)\| e^{-\sigma\tau} d\tau + \\ &+ \frac{e^{-\sigma t}}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \|\eta\| e^{-\sigma T} + \frac{K e^{-\sigma t}}{\alpha \Gamma(\alpha)} (t^\alpha - (t-T)^\alpha) + \frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|x(\tau)\| e^{-\sigma\tau} d\tau + \\ &+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^{\sigma(\tau - t)} d\tau \leq \\ &\leq \|\eta\| e^{-\sigma T} + \frac{K T^\alpha e^{-\sigma T}}{\alpha \Gamma(\alpha)} + \frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|x(\tau)\| e^{-\sigma\tau} d\tau + \\ &+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-\sigma s} ds \leq \\ &\leq \|\eta\| e^{-\sigma T} + \frac{K T^\alpha e^{-\sigma T}}{\alpha \Gamma(\alpha)} + \frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|x(\tau)\| e^{-\sigma\tau} d\tau + \\ &+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-\sigma s} ds \leq \\ &\leq \|\eta\| e^{-\sigma T} + \frac{K T^\alpha e^{-\sigma T}}{\alpha \Gamma(\alpha)} + \frac{M}{\sigma^\alpha} + \frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|x(\tau)\| e^{-\sigma\tau} d\tau, \end{aligned}$$

pre $t \geq T$. Ak označíme

$$a = \|\eta\| e^{-\sigma T} + \frac{K T^\alpha e^{-\sigma T}}{\alpha \Gamma(\alpha)} + \frac{M}{\sigma^\alpha}, \quad b = \frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)}, \quad r(t) = \|x(t)\| e^{-\sigma t},$$

dostávame

$$r(t) \leq a + b \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} r(\tau) d\tau, \quad t \geq T. \tag{2.9}$$

Pomocou Lemy 2.2 dostávame nerovnosť

$$r(t) \leq aF_\alpha(\theta t) = a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b\Gamma(\alpha))^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad t \geq T.$$

Dosadením definície Mittagovej-Lefflerovej funkcie dostaneme nerovnosť:

$$r(t) \leq aE_{\alpha,1}(b\Gamma(\alpha)t^\alpha), \quad t \geq T. \tag{2.10}$$

Využitím nerovnosti z Lemy 2.1 dostávame

$$r(t) \leq aCe^{(b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}t}, \quad t \geq T.$$

Z definície funkcie $r(t)$ je vidieť, že

$$\|x(t)\| \leq aCe^{[(b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}+\sigma]t}, \quad t \geq T.$$

Dokázali sme teda, že funkcia $x(t)$ je exponenciálne ohraničená. Exponenciálnu ohraničenosť jej Caputovej derivácie môžeme dokázať priamo z rovnice (2.6) využitím exponenciálnej ohraničenosti funkcie $x(t)$:

$$\|{}_0^C D_t^\alpha x(t)\| \leq \|A\|\|x(t)\| + \|f(t)\| \leq a\|A\|Ce^{[(b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}+\sigma]t} + Me^{\sigma t} \leq$$

$$\leq (a\|A\|C + M)e^{[(b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}+\sigma]t}, \quad t \geq T.$$

Dokázali sme, že riešenie rovnice (2.6) aj jeho Caputova frakcionálna derivácia sú exponenciálne ohraničené a teda existujú ich Laplaceove transformácie.

□

Po aplikovaní Laplaceovej transformácie na rovnicu (2.6) dostaneme

$$L[x(t)](s) = s^{\alpha-1}(s^\alpha - A)^{-1}\eta + (s^\alpha - A)^{-1}L[f(t)](s), \tag{2.11}$$

následnou aplikáciou inverznej Laplaceovej transformácie a využitím vzťahu z Vety 2.2 dostaneme rovnosť

$$x(t) = E_{\alpha,1}(t)\eta + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha)f(\tau)d\tau. \tag{2.12}$$

Kapitola 3

Príklady

Majme počiatočnú úlohu

$$ {}_0^C D^\alpha f(t) - \lambda f(t) = 0, \qquad t > 0, \quad n-1 < \alpha < n, \tag{3.1}$$

$$ f^{(k)}(0) = b_k, \qquad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.2}$$

Riešenie úlohy (3.1) so začiatočnou podmienkou (3.2) je dané vzťahom:

$$ f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha). \tag{3.3}$$

Aplikovaním Laplaceovej transformácie na rovnicu (3.1) a využitím vzťahu na určenie Laplaceovej transformácie Caputovej frakcionálnej derivácie (2.4) dostaneme:

$$ s^\alpha L[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) - \lambda L[f(t)](s) = 0.$$

Funkciu $f(t)$ môžeme následne vyjadriť pomocou inverznej Laplaceovej transformácie:

$$ f(t) = L^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda} f^{(k)}(0)\right].$$

Z počiatočných podmienok (3.2) potom dostaneme:

$$ f(t) = L^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda} b_k\right].$$

Z Vety 2.2 môžeme vidieť, že funkcia

$$ \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda}$$

je Laplaceovou transformáciou funkcie $t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha)$. Z linearity Laplaceovej transformácie následne vyplýva vzťah:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha).$$

Príklad 3.1. ([1]) Riešme rovnicu s Riemannovou-Liouvillovou frakcionálnou deriváciou

$$ {}_0D_t^{1/2} f(t) + af(t) = 0, \quad t > 0$$

s podmienkou

$$ {}_0D_t^{-1/2} f(t)\big|_{t=0} = C.$$

Aplikovaním Laplaceovej transformácie na rovnicu dostaneme:

$$L[{}_0D_t^{1/2} f(t) + af(t)](s) = L[0](s)$$

$$L[{}_0D_t^{1/2} f(t)](s) + aL[f(t)](s) = 0$$

Využijeme vzťah (2.2) na výpočet Laplaceovej transformácie Riemannovej-Liouvillovej frakcionálnej derivácie.

$$s^{1/2} L[f(t)](s) -_0 D_t^{-1/2} f(t)\big|_{t=0} + aL[f](s) = 0$$

$$L[f](s) = \frac{{}_0D_t^{-1/2} f(t)\big|_{t=0}}{s^{1/2} + a} = \frac{C}{s^{1/2} + a}$$

Aplikujeme inverznú Laplaceovu transformáciu:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{C}{s^{1/2} + a}\right](t)$$

Z Vety 2.2 vidíme, že riešenie rovnice je Mittagova-Lefflerova funkcia s parametrami $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

$$f(t) = Ct^{-1/2} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(a\sqrt{t}).$$

Príklad 3.2. ([1]) Riešme rovnicu

$$ {}_0D_t^Q f(t) +_0 D_t^q f(t) = h(t),$$

pre $0 < q < Q < 1$. Aplikujeme Laplaceovu transformáciu a využijeme vzťah (2.2):

$$L[{}_0D_t^Q f(t)](s) + L[{}_0D_t^q f(t)](s) = L[h(t)](s)$$

$$(s^Q + s^q)L[f(t)](s) = L[h(t)](s) + ({}_0D_t^{q-1}f(t) +_0 D_t^{Q-1}f(t)\big|_{t=0})$$

Označme $({}_0D_t^{q-1}f(t) +_0 D_t^{Q-1}f(t)\big|_{t=0}) = C$. Potom

$$L[f(t)](s) = \frac{C + L[h(t)](s)}{s^q + s^Q} = \frac{C + L[h(t)](s)}{s^q(1 + s^{Q-q})} = (C + L[h(t)](s))\frac{s^{-q}}{s^{Q-q} + 1}.$$

Aplikovaním inverznej Laplaceovej transformácie a využitím Mittagovej-Lefflerovej funkcie a vety (odkaz) pre parametre $\alpha = Q - q, \beta = Q$ dostaneme riešenie rovnice v tvare:

$$f(t) = CG(t) + \int_0^t G(t-\tau)h(\tau)d\tau,$$

kde $C = ({}_0D_t^{q-1}f(t) +_0 D_t^{Q-1}f(t)\big|_{t=0})$ a $G(t) = t^{Q-1}E_{Q-q,Q}(-t^{Q-q})$.

Príklad 3.3. ([1]) Riešme rovnicu so sekvenčnými deriváciami. Rovnica je analogická s rovnicou v Príklade 3.1.

$$\begin{gathered}{}_0D_t^{\alpha}({}_0D_t^{\beta}f(t)) + af(t) = 0\\ {}_0D_t^{\alpha-1}({}_0D_t^{\beta}f(t))\big|_{t=0} = b_1, \quad {}_0D_t^{\beta-1}f(t))\big|_{t=0} = b_2,\end{gathered}$$

kde $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \alpha + \beta = 1/2$. Použijeme Laplaceovu transformáciu (2.3).V tomto prípade vezmeme konštanty $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta$ a $m = 2$. Z toho $\sigma_1 = \alpha$ a $\sigma_2 = \alpha + \beta = 1/2$. Laplaceova transformácia rovnice bude tvaru:

$$(s^{\alpha+\beta} + a)L[f(t)](s) = s^{\beta}b_2 + b_1,$$

z čoho

$$L[f(t)](s) = b_2\frac{s^{\beta}}{s^{\alpha+\beta} + a} + b_1\frac{1}{s^{\alpha+\beta} + a}.$$

Aplikovaním inverznej Laplaceovej transformácie a vzťahu na výpočet Laplaceovej transformácie Mittagovej-Lefflerovej funkcie z Vety 2.2 vyplýva, že riešenie je dané vzťahom

$$f(t) = b_2t^{\alpha-1}E_{\alpha+\beta,\alpha}(-at^{\alpha+\beta}) + b_1t^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-at^{\alpha+\beta}).$$

Všimnime si, že pri voľbe konštánt $\alpha = 1/2$ a $\beta = 0$ (predpokladáme, že $b_2 = 0$) je riešenie rovnaké, ako v Príklade 3.1.

Literatúra

[1] Igor Podlubny, *The Laplace Transform Method for Linear Differential Equations of the Fractional Order*, Ústav experimentálnej fyziky SAV, Košice, 1994

[2] Li Kexue, Peng Jigen, *Laplace transform and fractional differential equations* Applied Mathematics Letters, Vol: 24, (2011), 2019-2023

[3] Manuel D.Ortigueira, J.A.Tenreiro Machado, *What is a fractional derivative?*, Journal of Computational Physics, Vol: 293, (2015), 4–13

[4] A.A. Kilbas, H. M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science, 2006