Vedecká rada Fakulty matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

Mgr. Branislav Novotný

Autoreferát dizertačnej práce

Topologies on Functional Spaces and Hyperspaces

pre udelenie akademickej hodnosti *Philosophiae doctor*

v odbore doktorandského štúdia
9-1-9 Aplikovaná matematika

Bratislava, 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Matematickom ústave Slovenskej akadémie vied v Bratislave.

Predkladateľ:	Mgr. Branislav Novotný
Názov:	Topologies on Functional Spaces and Hyperspaces
Školiteľka:	doc. RNDr. Ľubica Holá, DrSc.
Oponenti:	doc. RNDr. Roman Frič, DrSc.
	doc. RNDr. Milan Matejdes, CSc.
	doc. RNDr. Dušan Holý, CSc.

Autoreferát bol rozposlaný dňa 15. júla 2010.

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa 27. augusta 2010 o 10.30 hod pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia *9-1-9 Aplikovaná matematika*, vymenovanou predsedom Odborovej komisie dňa 9.júla 2010.

prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
predseda Odborovej komisie
pre obhajoby dizertačných prác
vo vednom odbore 9-1-9 Aplikovaná matematika

Abstract

Let X, Y be topological spaces. We study subcontinuity of multifunctions from X to Y and its relations to local compactness, local total boundedness and upper semicontinuity. If Y is regular, then F is subcontinuous iff $\overline{F}$ is USCO. A uniform space Y is complete iff for every topological space X and for every net $\{F_a\}$, $F_a \subset X \times Y$ of multifunctions subcontinuous at $x \in X$, uniformly convergent to F, F is subcontinuous at x. A Tychonoff space Y is Čech-complete (resp. $G_{\mathfrak{m}}$-space) iff for every topological space X and every multifunction $F \subset X \times Y$ the set of points of subcontinuity of F is a G_δ-subset (resp. $G_{\mathfrak{m}}$-subset) of X.

Let (X, ρ) be a metric space and $(CL(X), W_\rho)$ be the hyperspace of all nonempty closed subsets of X equipped with the Wijsman topology. We show that all studied cardinal invariants except of cellularity and density of $(CL(X), W_\rho)$ are equal to the density $d(X)$ of the underlying space. If $(CL(X), W_\eta)$ is normal for every uniformly equivalent metric η on (X, ρ), then X is separable. We prove that if X is a metrizable linear topological space and ρ is a compatible metric, then $(CL(X), W_\rho)$ is normal iff X is separable.

1 Úvod

Všeobecná topológia je odvetvie matematiky, v ktorom sa študujú topologické priestory a štruktúry na nich definované. Počas 19. storočia sa vyčlenila z matematickej analýzy ako samostatný odbor. Funkcionálne priestory a hyperpriestory s ich topológiami sú veľmi podstatnou časťou všeobecnej topológie. Naša práca sa zaoberá subspojitosťou multifunkcií a Wijsmanovou topológiou, ktorá je významnou hyperpriestorovou topológiou.

Pojem subspojitosti zaviedol Fuller [16] v 1968. Subspojité funkcie sú zovšeobecnením funkcií s kompaktným oborom hodnôt. Zaujímavý je jej vzťah k spojitosti.

Nech priestor Y je Hausdorffov. Funkcia $f : X \to Y$ je spojitá práve vtedy, keď je subspojitá a má uzavretý graf.

Subspojitosť sa dá prirodzene rozšíriť na multifunkcie ([35],[59]). Subspojitosť funkcií a multifunkcií je študovaná v mnohých prácach: [1],[6],[18],[21],[25],[41].

Nech X je Hausdorffov priestor. Hyperpriestor je priestor všetkých uzavretých neprázdnych podmnožín X a označuje sa $CL(X)$. Klasické hyperpriestorové toplógie sú Vietorisova topológia, Fellova topológia, topológia indukovaná Hausdorffovou metrikou a Wijsmanova topológia. Dôležitý nevyriešený problém je charakterizácia normality Wijsmanovej topológie cez vlastnosti základného priestoru. Normalita Vietorisovej topológie je ekvivalentná kompaktnosti X ([61]) a normalita Fellovej topológie je ekvivalentná tomu, že X je lokálne kompaktný a Lindelöfov ([28]).

Základné pojmy a označenia sú z [38], [12] a pre hyperpriestory a multifunkcie z [4].

2 Hlavné výsledky

2.1 Subspojitosť, lokálna kompaktnosť a lokálna totálna ohraničenosť

Definícia 2.1.1 *([35],[59]) Nech X a Y sú topologické priestory a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. F je subspojitá (SC) v $x \in X$, ak pre každú sieť $\{x_a\}$ konvergujúcu k x má každá sieť $\{y_a\}$, $y_a \in F(x_a)$, hromadný bod.*

F je subspojitá (SC), ak je SC v každom $x \in X$.

Veta 2.1.2 *Nech X a Y sú topologické priestory a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

1. *F je SC v $x \in X$;*

2. *pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru Y existuje konečný podsystém $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ a okolie V bodu $x \in X$ také, že $F(V) \subset \cup\mathcal{F}$.*

Definícia 2.1.3 *Nech X a Y sú topologické priestory a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. F je lokálne kompaktná (LC) v $x \in X$, ak existuje okolie V bodu x a kompaktná množina $K \subset Y$ taká, že $F(V) \subset K$.*

F je LC, ak je LC v každom $x \in X$.

Definícia 2.1.4 *Nech X je topologický priestor, $(Y, \mathcal{W})$ je uniformný priestor a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. F je lokálne totálne ohraničená (LTB) v $x \in X$, ak pre každé $W \in \mathcal{W}$ existuje okolie V bodu x a konečná množina $M \subset Y$ taká, že $F(V) \subset W(M)$.*

F je LTB, ak je LTB v každom $x \in X$.

Veta 2.1.5 *Nech X je topologický priestor, $(Y, \mathcal{W})$ je uniformný priestor a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

1. *F je LTB v $x \in X$;*

2. *pre každú sieť $\{x_a\}$ konvergujúcu k x, má každá sieť $\{y_a\}$, taká, že $y_a \in F(x_a)$, cauchyovskú podsieť.*

Vzťahy medzi týmito pojmami sa dajú znázorniť v nasledovnom diagrame:

$$\begin{tikzcd}
\text{Y:} & & & & \text{Uniform} & \\
\text{F:} & \text{Locally Compact} \arrow[rr, shift left] & \arrow[d, shift right] \arrow[d, <-, shift left] & \text{Subcontinuous} \arrow[ll, shift left] \arrow[rr, shift left] & \arrow[d, shift right] \arrow[d, <-, shift left] & \text{Locally Totally Bounded} \arrow[ll, shift left] \\
\text{Y:} & & \text{Locally Compact} & & \text{Complete Uniform} &
\end{tikzcd}$$

To znamená, že každá lokálne kompaktná multifunkcia je subspojitá a každá subspojitá multifunkcia s hodnotami v uniformnom priestore Y je lokálne totálne ohraničená. Každá subspojitá multifunkcia s hodnotami v Y je lokálne kompaktná práve vtedy, keď Y je lokálne kompaktný a každá lokálne totálne ohraničená multifunkcia s hodnotami v uniformnom priestore Y je subspojitá práve vtedy, keď Y je úplný.

Pripomeňme, že multifunkcia $F \subset X \times Y$ je polospojitá zhora (USC) v $x \in X$, ak pre každú otvorenú množinu $U \supset F(x)$ existuje okolie V bodu x také, že $F(V) \subset U$. Ak je naviac $F(x)$ kompaktná, potom hovoríme, že F je USCO v x.

F je polospojitá zdola (LSC) v $x \in X$, ak pre každú otvorenú množinu U takú, že $U \cap F(x) \neq \emptyset$ existuje okolie V bodu x také, že pre všetky $\hat{x} \in V$ je $F(\hat{x}) \cap U \neq \emptyset$.

F je zmiešane polospojitá (MSC) v x, ak pre každú otvorenú $U \supset F(x)$ existuje okolie V bodu x také, že pre všetky $\hat{x} \in V$ je $F(\hat{x}) \cap U \neq \emptyset$. Túto vlastnosť môžeme nájsť v prácach [13] a [56, p. 272].

F je USC (USCO, LSC, MSC), ak je USC (USCO, LSC, MSC) v každom $x \in X$.

Tvrdenie 2.1.6 *([39, 2.4, 2.5]) Nech X, Y sú topologické priestory a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. Ak F je USCO v x, potom je SC v x. Naopak, ak F je SC v x a naviac $F(x) = \overline{F}(x)$, potom je USCO v x.*

Veta 2.1.7 *Nech X, Y sú topologické priestory, Y je regulárny a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. Potom F je SC v $x \in X$ práve vtedy, keď $\overline{F}$ je SC v x (a teda USCO v x).*

2.2 Slabá subspojitosť

Jeden z nových konceptov subspojitosti je *slabá subspojitosť* v práci [17] (W_2SC z nasledujúcej definície). V dizertačnej práci uvažujeme tri možnosti zoslabenia subspojitosti.

Definícia 2.2.1 *Nech X, Y sú topologické priestory a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia.*

F je W_1SC v $x \in X$, ak existuje selekcia F taká, že je SC v x.

F je W_2SC v $x \in X$, ak pre každú sieť $x_a \to x$ existuje sieť $\{y_a\}$, $y_a \in F(x_a)$, s hromadným bodom.

F je W_3SC v $x \in X$, ak pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestou Y existuje okolie V bodu x a konečný podsystém $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ taká, že pre všetky $\hat{x} \in V$ je $F(\hat{x}) \cap (\cup\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

Tvrdenie 2.2.2 *Nech X, Y sú topologické priestory a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. Ak je F W_iSC v $x \in X$ pre $i = 1$ alebo 2, potom je aj $W_{i+1}SC$ v x. Ak je Y lokálne kompaktný, potom sú všetky tri pojmy ekvivalentné.*

Tak ako subspojitosť súvisí s polospojitosťou zhora, tak sa dá nájsť vzťah slabej subspojitosti a zmiešanej subspojitosti.

Veta 2.2.3 *Nech X, Y sú topologické priestory a $F \subset X \times Y$ je multifunkcia. Ak je F W_2SC v $x \in X$ a $F(x) = \overline{F}(x)$, potom je F MSC v x. Ak je F LSC v $x \in X$ (resp. je MSC v x a $F(x)$ je podmnožina kompaktnej množiny) potom je F W_3SC v x.*

2.3 Subspojitosť vzhľadom k hypertopológii

Študujeme aj iný spôsob zovšeobecnenia subspojitosti z funkcií na multifunkcie a to tak, že multifunkciu uvažujeme ako zobrazenie s hodnotami v hyperpriestore. Za istých predpokladov je subspojitosť vzhľadom k hornej Vietorisovej topológii ekvivalentná subspojitosti.

Definícia 2.3.1 *Nech X, Y sú topologické priestory, τ je hypertopológia na $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{P}(Y)$ a $F : X \to \mathcal{B}(Y)$. F je τ-subspojitá (τ-SC) v $x \in X$, ak pre každú sieť $x_a \to x$ má sieť $\{F(x_a)\}$ hromadný bod v $(\mathcal{B}(Y), \tau)$.*

Veta 2.3.2 *Nech X, Y sú topologické priestory, Y je regulárny a V^+ je horná Vietorisova topológia na $\mathcal{K}(Y)$, priestore kompaktných podmnožín Y. Multifunkcia $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ je SC v $x \in X$ práve vtedy, keď je V^+-SC v x.*

2.4 Konvergencia subspojitých multifunkcií

Skúmame, ktoré konvergencie zachovávajú subspojitosť. Ukázalo sa (na príkladoch), že zaujímavá je hlavne rovnomerná konvergencia a v tomto prípade je kľúčové skúmať zachovanie lokálnej totálnej ohraničenosti.

Definícia 2.4.1 *([58]) Nech X je topologický priestor a $(Y, \mathcal{W})$ je uniformný priestor. Hovoríme, že sieť multifunkcií $\{F_a\}$, $F_a \subset X \times Y$, konverguje rovnomerne k $F \subset X \times Y$ ($F_a \rightrightarrows F$), ak pre každú $W \in \mathcal{W}$ existuje a_0 také, že pre všetky $a \geq a_0$ platí $F_a(\hat{x}) \subset W(F(\hat{x}))$ a $F(\hat{x}) \subset W(F_a(\hat{x}))$ pre všetky $\hat{x} \in X$.*

Veta 2.4.2 *Nech X je topologický priestor, $(Y, \mathcal{W})$ je uniformný priestor a $\{F_a\}$, $F_a \subset X \times Y$, je sieť multifunkcií LTB v $x \in X$. Ak $F_a \rightrightarrows F \subset X \times Y$, potom F je LTB v x.*

Dôsledok 2.4.3 *Nech X je topologický priestor, $(Y, \mathcal{W})$ je úplný uniformný priestor a $\{F_a\}$, $F_a \subset X \times Y$, je sieť multifunkcií SC v $x \in X$. Ak $F_a \rightrightarrows F \subset X \times Y$, potom F je SC v x.*

Definícia 2.4.4 *Nech $(X, \mathcal{V})$ a $(Y, \mathcal{W})$ sú uniformné priestory. Sieť multifunkcií $\{F_a\}$, $F_a \subset X \times Y$, konverguje k multifunkcii $F \subset X \times Y$ vzhľadom k Hausdorffovej uniformite ($F_a \stackrel{\mathcal{H}}{\to} F$), ak pre každú $V \in \mathcal{V}$ a každú $W \in \mathcal{W}$ existuje a_0 také, že pre všetky $a \geq a_0$ platí $F \subset W \circ F_a \circ V^{-1}$ a $F_a \subset W \circ F \circ V^{-1}$.*

Veta 2.4.5 *Nech $(X, \mathcal{V})$ je lokálne kompaktný uniformný priestor, $(Y, \mathcal{W})$ je úplný uniformný priestor a $\{F_a\}$, $F_a \subset X \times Y$, je sieť multifunkcií SC v $x \in X$. Ak $F_a \stackrel{\mathcal{H}}{\to} F \subset X \times Y$, potom F je SC v x.*

2.5 Množina bodov subspojitosti multifunkcie

Označme množinu bodov subspojitosti multifunkcie F symbolom $SC(F)$ a množinu bodov polospojitosti zhora multifunkcie F symbolom $USC(F)$.

Definícia 2.5.1 *([15, 2.1]) Podmnožina G topologického priestoru X sa nazýva $G_{\mathfrak{m}}$-podmnožina, ak je prienikom otvoreného systému množín s kardinalitou $\mathfrak{m}$. Hausdorffov priestor sa nazýva $G_{\mathfrak{m}}$-priestor, ak je $G_{\mathfrak{m}}$-podmnožinou každého svojho Hausdorffovho rozšírenia.*

Namiesto $G_{\aleph_0}$, používame G_δ a T_1 úplne regulárny G_δ-priestor sa nazýva čechovsky úplný priestor.

Veta 2.5.2 *Nech Y je T_1 úplne regulárny priestor. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

1. *Y je $G_{\mathfrak{m}}$-priestor;*
2. *pre každý topologický priestor X a každú multifunkciu $F \subset X \times Y$, $SC(F)$ je $G_{\mathfrak{m}}$-podmnožina X;*
3. *pre každý topologický priestor X a každú multifunkciu $F \subset X \times Y$ s uzavretým grafom a kompaktnými hodnotami, $USC(F)$ je $G_{\mathfrak{m}}$-podmnožina X.*

Dôsledok 2.5.3 *Nech Y je T_1 úplne regulárny priestor. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

1. *Y je čechovsky úplný priestor;*
2. *pre každý topologický priestor X a každú multifunkciu $F \subset X \times Y$, $SC(F)$ je G_δ-podmnožina X;*
3. *pre každý topologický priestor X a každú multifunkciu $F \subset X \times Y$ s uzavretým grafom a kompaktnými hodnotami, $USC(F)$ je G_δ-podmnožina X.*

2.6 Kardinálne invarianty Wijsmanovej topológie

Kardinálnu funkciu (invariant) topologického priestoru X značíme $f(X)$. V prípade, že závisí od bodu $x \in X$ značíme ju $f(x, X)$. Potom definujeme $f(X) = sup\{f(x, X); x \in X\}$. Pre každú f definujeme aj jej dedičnú verziu hf; $hf(X) = sup\{f(Y); Y \subset X\}$. Príkladmi takýchto funkcií sú *váha* $w(X) = \aleph_0 + min\{|\mathcal{B}|; \mathcal{B} \text{ je báza } X\}$; *charakter* $\chi(x, X) = \aleph_0 + min\{|\mathcal{B}|; \mathcal{B} \text{ je lokálna báza } X \text{ v okolí } x\}$; *hustota* $d(X) = \aleph_0 + min\{|E|; E \text{ je hustá v } X\}$. Mnoho ďalších kardinálnych funkcií sa dá nájsť v [12], [22], [37], [51].

Nech (X, ρ) je metrický priestor a $CL(X, W_\rho)$ je hyperpriestor vybavený Wijsmanovou topológiou; t.j. slabou topológiou generovanou systémom $\{\rho(x, \cdot) : CL(X) \to \mathbb{R}; x \in X\}$.

Veta 2.6.1 $d(X) = f(CL(X)) = hf(CL(X))$, *pričom f môže byť ktorákoľvek z nasledujúcich funkcií: pseudocharakter, pseudováha, $\pi-$charakter, $\pi-$váha, charakter, váha, net-váha, tesnosť, Lindelöfov stupeň, diagonálny stupeň, uniformná váha, slabá váha, extend, spread.*

To sú všetky kardinálne invarianty, ktoré sme uvažovali, okrem hustoty d a celularity c. Pre ne máme takéto odhady

$$\aleph_0 \leq c(CL(X)) \leq d(CL(X)) \leq d(X),$$

$$d(CL(X)) \geq \log d(X) = min\{\kappa; d(X) \leq 2^\kappa\}.$$

Ktorákoľvek z týchto nerovností môže nadobúdať rovnosť a môže byť aj ostrá.

2.7 Normalita Wijsmanovej topológie

V [46, Problem I] sa nachádza nasledovná otázka: *Je známe, že ak* (X, ρ) *je separabilný metrický priestor, potom* $(CL(X), W_\rho)$ *je metrizovateľný a teda aj parakompaktný a normálny. Je pravdou opak? Je* $(CL(X), W_\rho)$ *normálny iba ak je metrizovateľný?* Našli sme niekoľko tried metrických priestorov, kde to platí.

Veta 2.7.1 *Nech* (X, ρ) *je metrický priestor s* $0 - 1$ *metrikou* ρ. *Ak je* $(CL(X), W_\rho)$ *normálny, potom je* X *spočítateľný.*

Veta 2.7.2 *Nech* X *je metrizovateľný lineárny topologický priestor a* ρ *je kompatibilná metrika.* $(CL(X), W_\rho)$ *is normálny práve vtedy, keď je* X *separabilný.*

Tiež sme odpovedali na slabšiu otázku.

Veta 2.7.3 *Nech* (X, ρ) *je metrický priestor. Ak pre každú metriku* δ *uniformne ekvivalentnú* ρ *je* $(CL(X), W_\delta)$ *normálny, potom je* X *separabilný.*

Zoznam publikácií

1. B. Novotný. On subcontinuity. *Real Anal. Ex.*, 31(2):535–546, 2005/2006.

2. Ľ. Holá, B. Novotný. Subcontinuity. to appear in *Mathematica Slovaca*

Literatúra

[1] N. Ajmal and R.D. Sarma. Fuzzy subcontinuity, inverse fuzzy subcontinuity and a new category of fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 27:636–651, 1963.

[2] H. Attouch. *Variational Convergence for Functions and Operators*. Pitman, Boston, 1984.

[3] A. Barbati and C. Costantini. On the density of the hyperspace of a metric space. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 38(2):349–360, 1997.

[4] G. Beer. *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 1993.

[5] G. Beer, A. Lechicki, S. Levi, and S.A. Naimpally. Distance functionals and suprema of hyperspace topologies. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 162:367–381, 1992.

[6] A. Bouziad. Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(3):953–959, 1996.

[7] J. Chaber and R. Pol. Note on the Wijsman hyperspaces of completely metrizable spaces. *Bol. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.*, 5:827–832, 2002.

[8] C. Costantini, Ľ. Holá, and P. Vitolo. Tightness, character and related properties of hyperspace topologies. *Topology and its Applications*, 142:245–292, 2004.

[9] C. Costantini, S. Levi, and J. Zieminska. Metrics that generate the same hyperspace convergence. *Set-Valued Analysis*, 1:141–157, 1993.

[10] J. Doboš. On the set of points of discontinuity for functions with closed graphs. *Čas. pěst. mat.*, 110:60–68, 1985.

[11] S. Dolecki, G.H. Greco, and A. Lechicki. Compactoid and compact filters. *Pacific J. Math.*, 117(1):69–98, 1985.

[12] R. Engelking. *General topology*. PWN, Warszawa, 1977.

[13] J. Ewert. On quasi continuous multivalued maps with values in uniform spaces. *Bull. Acad. Pol. Math.*, 32:81–88, 1984.

[14] S. Francaviglia, A. Lechicki, and S. Levi. Quasi- uniformization of hyperspaces and convergence of nets of semicontinuous multifunctions. *Journal Math. Analysis and Appl.*, 112(2):347–370, 1985.

[15] Z. Frolík. Generalizations of the G_δ-property of complete mertic spaces. *Czech. Math. J.*, 85:359–378, 1960.

[16] R.V. Fuller. Relations among continuous and various noncontinuous functions. *Pac. J. Math.*, 25(3):495–509, 1968.

[17] D.K. Ganguly and P. Mallick. On generalized continuous multifunctions and their selections. *Real Anal. Ex.*, 33(2):449–456, 2007/2008.

[18] A. Goel and G.L. Garg. Convergence conditions and closed graphs. *Soochow J. Math.*, 33(2):257–261, 2007.

[19] S.T. Hammer and R.A. McCoy. Spaces of densely continuous forms. *Set-Valued Anal.*, 5:247–266, 1997.

[20] F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, Leipzig, 1914.

[21] L.L. Herrington. Remarks on $H(i)$ spaces and strongly closed graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 58:277–283, 1976.

[22] R. Hodel. *Set-Theoretic Topology*, chapter Cardinal Functions I, pages 1–61. North-Holland, 1984.

[23] Ľ. Holá. Hausdorff metric on the space of upper semicontinuous multifunctions. *Rocky Mount. J. Math.*, 22:601–610, 1992.

[24] Ľ. Holá. Spaces of densely continuous forms, usco and minimal usco maps. *Set-Valued Anal.*, 11:133–151, 2003.

[25] Ľ. Holá and D. Holý. Minimal usco maps, densely continuous forms and upper semi-continuous functions. *Rocky Mount. J. Math.*, 39:545–562, 2009.

[26] Ľ. Holá, T. Jain, and R.A. McCoy. Topological properties of the multifunction space $L(X)$ of CUSCO maps. *Mathematica Slovaca*, 58(6):763–780, 2008.

[27] Ľ. Holá and S. Levi. Decomposition properties of hyperspace topologies. *Set-Valued Anal.*, 5:309–321, 1997.

[28] Ľ. Holá, S. Levi, and J. Pelant. Normality and paracompactness of the Fell topology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127:2193–2197, 1999.

[29] Ľ. Holá and R.A. McCoy. Relations approximated by continuous functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133:2173–2182, 2005.

[30] Ľ. Holá and R.A. McCoy. Cardinal invariants of the topology of uniform convergence on compact sets on the space of minimal usco maps. *Rocky Mountain J. Math.*, 37:229–246, 2007.

[31] Ľ. Holá, R.A. McCoy, and J. Pelant. Approximations of relations by continuous functions. *Topology Appl.*, 154:2241–2247, 2007.

[32] Ľ. Holá and J. Pelant. Recent progress in hyperspace topologies. *Recent Progress in General Topology II*, pages 253–285, 2002.

[33] D. Holý and P. Vadovič. Hausdorff graph topology, proximal graph topology, and the uniform topology for densely continuous forms and minimal USCO maps. *Acta Mathematica Hungarica*, 116:133–144, 2007.

[34] D. Holý and P. Vadovič. Densely continuous forms, pointwise topology and cardinal functions. *Czechoslovak Math. J.*, 58(1):19–92, 2008.

[35] R. Hrycay. Noncontinuous multifunctions. *Pac. J. Math.*, 35(1):141–154, 1970.

[36] J.E. Joseph. Multifunctions and graphs. *Pac. J. Math.*, 79(2):509–529, 1978.

[37] I. Juhász. *Cardinal Functions in Topology - Ten Years Later*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[38] J.L. Kelley. *General Topology*. D. Van Nostrand Co., Princeton, 1955.

[39] A. Lechicki. On bounded and subcontinuous multifunctions. *Pac. J. Math.*, 75(1):191–197, 1978.

[40] A. Lechicki and S. Levi. Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 1-B:439–452, 1987.

[41] A. Lechicki and S. Levi. Extensions of semicontinuous multifunctions. *Forum Mathematicum*, 2(4):341–360, 1990.

[42] A. Lechicki and J. Zieminska. Precompact, totally bounded and bonded filters. *Math. Nachr.*, 126:171–181, 1986.

[43] G. Di Maio and Ľ. Holá. On hit-and-miss topologies. *Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli*, LXII:103–124, 1995.

[44] G. Di Maio and Ľ. Holá. A hypertopology determined by the family of totally bounded sets is the infimum of upper Wijsman topologies. *Questions and Answers in General Topology*, 15:51–66, 1997.

[45] G. Di Maio and Ľ. Holá. Wijsman topology on function spaces. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XLVI:52–70, 1997.

[46] G. Di Maio and E. Meccariello. Wijsman topology. *Quaderni di Matematica*, 3:55–92, 1998.

[47] G. Di Maio and S.A. Naimpally. Comparison of hypertopologies. *Rendiconti dell'Istituto di matematica dell'Università di Trieste*, 22:140–161, 22.

[48] V.I. Malykhin. On tightness and Suslin number in exp x and in a product of spaces. *Soviet Mathematics - Doklady*, 13(2):496–499, 1972.

[49] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry.* Willey, New York, 1975.

[50] R.A. McCoy. Comparison of hyperspace and function space topologies. *Quaderni di Matematica*, 3:241–258, 1998.

[51] R.A. McCoy and I. Ntantu. *Topological Properties of Spaces of Continuous Functions.* Springer-Verlag, 1988.

[52] E. Michael. Topologies on spaces of subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71:152–182, 1951.

[53] R.A. Mimna and E.J. Wingler. Locally bounded functions. *Real Anal. Ex.*, 23(1):251–258, 1997/1998.

[54] T. Mizokami. Cardinal functions on hyperspaces. *Colloq. Math.*, 41:201–205, 1976.

[55] T. Mizokami and S. Nagasaki. Cardinal functions on hyperspaces. *Colloquium Mathematicum*, 41(2), 1979.

[56] T. Neubrunn. Quasi-continuity. *Real Anal. Ex.*, 14(2):259–306, 1988/1989.

[57] B. Novotný. On subcontinuity. *Real Anal. Ex.*, 31(2):535–546, 2005/2006.

[58] R.E. Smithson. Uniform convergence for multifunctions. *Pac. J. Math.*, 39(1):253–259, 1971.

[59] R.E. Smithson. Subcontinuity for multifunctions. *Pac. J. Math.*, 61(1):283–288, 1975.

[60] M. Čoban. Note sur topologie exponentielle. *Fundam. Math.*, 71:27–42, 1971.

[61] N.V. Velichko. On the space of closed subsets. *Sibirsk. Math. Z.*, 16:627–629, 1975.

[62] R. Wijsman. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123:32–45, 1966.