Komplexné čísla,
Diskrétna Fourierova transformácia[1]

Komplexné čísla

• $\mathbb{C}$ - množina všetkých komplexných čísel
• *komplexné číslo*: $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$,
  i - *imaginárna jednotka* $i = \sqrt{-1}$, t.j. $i^2 = -1$.
• *komplexne združené* číslo k číslu z: $\bar{z} = a - bi$
• $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
• ak $|\omega| = 1$, tak $\frac{1}{\omega} = \bar{\omega}$
• *absolútna hodnota* (*veľkosť*, *modul*) komlexného čísla: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
• ***operácie s komplexnými číslami***:
  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$
  $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$
  $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$
  $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{1}{c^2+d^2}\big((ac + bd) + i(bc - ad)\big)$
• *Goniometrický tvar* komplexného čísla:
  $z(= a + bi) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, kde $r = |z|$ a $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$,
  $a = r\cos\varphi$, $b = r \sin\varphi$.
• Násobenie komplexných čísel v goniometrickom tvare:
  $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_2)$,
  $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$:
  $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
• *Exponenciálny tvar* komplexného čísla: $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$$e^{i\varphi} = (e^x)_{x=i\varphi} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right)_{x=i\varphi} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j}\varphi^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j+1}\varphi^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

$$i^j = \begin{cases} 1 & j = 4k \\ i & j = 4k + 1 \\ -1 & j = 4k + 2 \\ -i & j = 4k + 3 \end{cases}, \text{ t.j. } i^{2j} = \begin{cases} 1 & j \text{ je párne} \\ -1 & j \text{ je nepárne} \end{cases} = (-1)^j$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varphi^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\varphi^{2j+1}}{(2j+1)!} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

• **Moivrova veta** (Moivre):
  Nech $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Potom $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$.
• Použitím exponenciálneho tvaru komplexného čísla dostávame, že predošlá veta platí aj pre reálne exponenty, t.j. $n \in \mathbb{R}$.

Súčtové vzorce:

• $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, • $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Niektoré vlastnosti goniometrických funkcií

• $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, • $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, • $x^\circ = \frac{\pi}{180} x \,\mathrm{rad}$, • $x \,\mathrm{rad} = \frac{180}{\pi} x^\circ$.
• $\cos(x)$ je párna funkcie, t.j. $\cos(-x) = \cos(x)$
• $\sin(x)$ je nepárna funkcia, t.j. $\sin(x) = -\sin(x)$
• $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
• $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

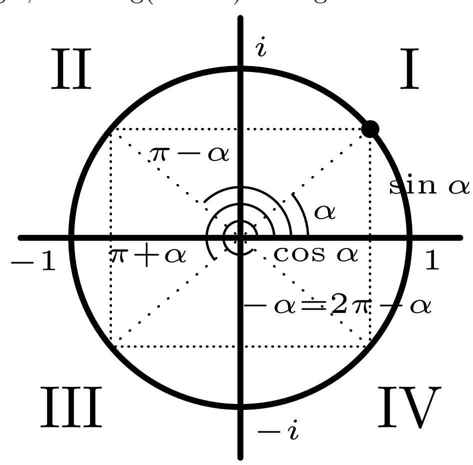
[1] Verzia 20091023-0920

°	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

°	180	210	225	240	270	300	315	330	360
°	-180	-150	-135	-120	-90	-60	-45	-30	0
rad	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
rad	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
sin	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

• Funkcie sin, cos, tg and cotg sú periodické s periódami (po rade) 2π, 2π, π, π, t.j. pre ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$ platí:

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$,
$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $\quad \operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$.



Komplexné n-té odmocniny z 1

• *n-tá odmocnina z 1* - $\omega \in \mathbb{C}$: $\omega^n = 1$
• $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ - *primitívna n-tá komplexná odmocnina z* 1
• Ak ω je n-tá odmocnina z 1, tak aj ω^k, $k \in \mathbb{Z}$ je n-tá odmocnina z jednotky.

Diskrétna Fourierova transformácia

Motivácia: k danému polynómu $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, treba vypočítať jeho hodnoty v hodnotách n-tých komplexných odmocnín z jednotky, t.j. v bodoch $\omega^0 = 1$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, ω^2, …, ω^{n-1}.

Diskrétna Fourierova transformácia vektora $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je vektor $(f(\omega^0), f(\omega^1), \ldots, f(\omega^{n-1}))$.

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \\ a_0 + a_1\omega + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1} \\ a_0 + a_1\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\omega^{2(n-1)} \\ \ldots \\ a_0 + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega 4 & \ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{ij} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = H\vec{a}.$$

Preto diskrétna Fourierova transformácia n-rozmerného vektora $\vec{a}$ je $H\vec{a}$, kde H je matica typu $n \times n$, s prvkami $H_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ a $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ je primitívna n-tá komplexná odmocnina z 1.

Inverzná diskrétna Fourierova transformácia

Spätná transformácia z vektora $(f(\omega^0), \ldots, f(\omega^{n-1}))$ na pôvodný vektor $(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

$H\vec{a} \mapsto H^{-1} \cdot (H\vec{a}) = \vec{a}$

$H^{-1} = \frac{1}{n}(\omega^{-(i-1)(j-1)})_{ij} = \frac{1}{n}((\frac{1}{\omega})^{(i-1)(j-1)})_{ij} = \frac{1}{n}(\bar{\omega}^{(i-1)(j-1)})_{ij} = \frac{1}{n}\bar{H}$

Teda k n-rozmernému vektoru $\vec{x}$ je inverzná DFT $H^{-1}\vec{x} = \frac{1}{n}\bar{H}\vec{x}$.

Zložitosť FFT pre ľubovoľné n

• Veta 2.2.5 (Wilf) - Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n na prvočísla. Potom zložitosť FFT pre rozmer vektora n, t.j. počet komplexných násobení potrebný na výpočet, je

$$n\left(\alpha_1(p_1 - 1) + \alpha_2(p_2 - 1) + \ldots + \alpha_k(p_k - 1)\right).$$

Príklady

• 1. Vypočítajte nasledovné súčiny:
(a) $(2-9i)(3+5i)$, (b) $(4+3i)(1+10i)$, (c) $(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \cdot 5(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

• 2. Vyjadrite v goniometrickom (exponenciálnom) tvare nasledujúce komplexné čísla:
(a) $1+i$, (b) $1-i$, (c) $\sqrt{3}+i$, (d) $\sqrt{3}-i$ (e) $1+i\sqrt{3}$, (f) $1-i\sqrt{3}$, (g) i

• 3. Vypočítajte:
(a) $(1+i)^{12}$, (b) $(1-i)^{31}$, (c) $(5+5\sqrt{3})^{10}$, (d) $(\sqrt{3}-i)^{23}$

• 4. Zvoľte si ľubovoľný vektor s
a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 6 f) 8 g) 12
(aj komplexnými) súradnicami a zistite jeho DFT. Následne skúste vypočítaním inverznej DFT overiť správnosť výpočtu.

• 5. Napíšte všeobecný vzorec pre
a) DFT, b) inverznú DFT.

• 6. Zistite zložitosť FFT pre vektor s
a) 315, b) 854, c) 126, d) 27, e) 43
súradnicami.

Riešené príklady

• Určte goniometrický a exponenciálny tvar komplexného čísla $1-\sqrt{3}i$.

Riešenie:
$z = 1-\sqrt{3}i$, $|x| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.
$z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Hľadáme riešenie sústavy: $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ a $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vidíme, že príslušný uhol (ak uvažujeme riešenia $[0,2\pi)$) treba hľadať v 4. kvadrante, t.j. v intervale $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, alebo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.
$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
Preto, pri substitúcii $\psi = -\varphi$ sa naša sústava zmení na

$$\cos\psi = \tfrac{1}{2},\ \sin\psi = \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

pričom riešenie hľadáme v 1. kvadrante. Použitím známych hodnôt pre sin a cos dostávame, že $\psi = \frac{\pi}{3} = 60°$. Preto $\varphi = -\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$.o
• Trochu iné riešenie určenia výsledného uhla: nech $|\cos\varphi| = a$, $|\sin\varphi| = b$, kde a, b sú známe tabulkové hodnoty pre 1. kvadrant, t.j.

$$(1,0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (0,1).$$

Nech toto zodpovedá uhlu φ. Potom, ak výsledok má byť v I. kvadrante, tak je to samotné φ, v II. kvadrante je to $\pi-\varphi$, v III. kvadrante je to $\pi+\varphi$ a IV. kvadrante to je $2\pi-\varphi$.
Výsledok: $z = 2(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi) = 2e^{i\frac{5}{3}\pi}$.

• Vypočítajte $(1-i\sqrt{3})^{35}$.

Riešenie:

Najprv si určíme goniometrický (či exponenciálny) tvar komplexného čísla $1-i\sqrt{3}$. Podľa predošlého príkladu je to $2(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi)$.

Potom, podľa Moivrovej [Moavrovej] vety platí:

$(1-i\sqrt{3})^{35} = (2(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi))^{35} = 2^{35}(\cos(35\cdot\frac{5}{3}\pi) + i\sin(35\cdot\frac{5}{3}\pi))$.

Potrebujeme zistiť, ktorý uhol z intervalu $[0, 2\pi)$ dáva tie isté hodnoty sin a cos ako uhol $35\cdot\frac{5}{3}\pi$. Teda potrebujem nájsť vhodný násobok periódy týchto funkcií (2π):

$35\cdot\frac{5}{3}\pi = \frac{175}{3}\pi = 58\pi + \frac{1}{3}\pi = 29\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$.

Výsledok: $2^{35}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2^{35}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2^{34}(1+i\sqrt{3})$.

• Spočítajte DFT pre vektor $(7,6,1)$ a overte správnosť výpočtu pomocou inverznej DFT.

Riešenie:

$\omega^{3k} = \omega^0 = 1$, $k \in \mathbb{Z}$

$\omega = e^{i\frac{2}{3}\pi} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Použili sme súčtové vzorce: $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$.)

$\omega^2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \cos(\pi+\frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi+\frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Použili sme vzorce pre $\sin(\pi+x) = -\sin x$ a $\cos(\pi+x) = -\cos x$.)

Preto matica v DFT je rovná:

$$\begin{pmatrix} w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 \\ w^0 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Pre DFT máme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+6+1 \\ 7+6(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ 7+6(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 7-3-\frac{1}{2}+i\sqrt{3}(3-\frac{1}{2}) \\ 7-3-\frac{1}{2}+i\sqrt{3}(-3+\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{7}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{7}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Výsledok: DFT vektora $(7,6,1)$ je vektor $(14, \frac{7}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{7}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2})$.

Skúška správnosti:

Matica pre inverznú DFT je rovná $\frac{1}{3}\bar{H}$, preto na overenie treba vypočítať

$$\frac{1}{3}\overline{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}14\\ \frac{7}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2}\\ \frac{7}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ \frac{7}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2}\\ \frac{7}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}14+\frac{7}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2}\\ 14+(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{7}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2})+(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{7}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2})\\ 14+(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{7}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2})+(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{7}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2})\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}21\\ 14-\frac{7}{4}+\frac{15}{4}-\frac{7}{4}+\frac{15}{4}+i\sqrt{3}(-\frac{5}{4}-\frac{7}{4}+\frac{5}{4}+\frac{7}{4})\\ 14-\frac{7}{4}-\frac{15}{4}-\frac{7}{4}-\frac{15}{4}+i\sqrt{3}(-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{5}{4}-\frac{7}{4})\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}21\\18\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\6\\1\end{pmatrix}$$

• Vypočítajte inverznú DFT k vektoru $(1,2,-1,2)$ a urobte skúšku priamou DFT.

Riešenie:

$\omega=e^{i\frac{2\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$

$$\frac{1}{4}\left(\bar{\omega}^{(i-1)(j-1)}\right)_{ij}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\overline{\begin{pmatrix}\omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0\\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3\\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6\\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{4}\overline{\begin{pmatrix}\omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0\\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3\\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^0 & \omega^2\\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^2 & \omega^1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\overline{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+2-1+2\\ 1-2i+1+2i\\ 1-2-1-2\\ 1+2i+1-2i\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\2\\-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Výsledok: $(1,\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$.

Skúška správnosti:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\\ 1+i\frac{1}{2}+1-i\frac{1}{2}\\ 1-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\\ 1-i\frac{1}{2}+1+i\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

- Určte zložitosť FFT pre vektor so 180-timi súradnicami.

  Riešenie:

  $180 = 2 \cdot 90 = 4 \cdot 45 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Preto zložitosť FFT (počet komplexných násobení) je $180(2(2-1) + 2(3-1) + (5-1)) = 180(2+4+4) = 1800$.