Rekurentné vzťahy[1]

Teoretická časť

Homogénna rovnica k-teho rádu s konštantnými koeficientami

- *Homogénna rovnica*: c_i sú konštanty, $0 \leq i \leq k$, $c_k \neq 0$

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

Počiatočné podmienky: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$ (vo všeobecnosti stačí zadať hodnoty a_i pre k navzájom rôznych indexov $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_0$).

Riešenie:

Upravíme na: $a_{n+k} + \frac{c_{k-1}}{c_k} a_{n+k-1} + \ldots + \frac{c_1}{c_k} a_{n+1} + \frac{c_0}{c_k} a_n = 0$.

Vytvoríme tzv. *charakteristickú rovnicu*:

$x^k + \frac{c_{k-1}}{c_k} x^{k-1} + \ldots + \frac{c_1}{c_k} x + \frac{c_0}{c_k} = 0$ a vyriešime ju.

Korene: y_1 (násobnosť m_1), ..., y_l (násobnosť m_l) - reálne i komplexné

Všeobecné riešenie, t.j. riešenie rekurentnej rovnice bez podmienok, je v tvare:

$$\begin{aligned}
a_n &= C_1^{(0)} y_1^n + C_1^{(1)} n y_1^n + \ldots + C_1^{(m_1-1)} n^{m_1-1} y_1^n + \\
&+ C_2^{(0)} y_2^n + C_2^{(1)} n y_2^n + \ldots + C_2^{(m_2-1)} n^{m_2-1} y_2^n + \\
&\quad \ldots \\
&+ C_l^{(0)} y_l^n + C_l^{(1)} n y_l^n + \ldots + C_l^{(m_l-1)} n^{m_l-1} y_l^n,
\end{aligned}$$

kde $C_i^{(j)} \in \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq l$, $0 \leq j \leq m_i - 1$ sú neznáme parametre. Ich počet je $m_1 + m_2 + \ldots + m_l = k$.

Dosadíme postupne počiatočné hodnoty $a_s = VR(a_s) = b_s$ pre zadané počiatočné podmienky, kde na jednej strane je zadaná hodnota b_s a na druhej je všeobecné riešenie pre index s, ktoré obsahuje ako neznáme $C_i^{(j)}$. Tým dostávame sústavu k rovníc s k neznámymi $C_i^{(j)}$, ktorej vyriešením získame vyjadrenie pre a_n, ktoré spĺňa aj počiatočné podmienky. Pozor, ak niektoré korene nie sú reálne, tak neznáme $C_i^{(j)}$ môžu byť komplexné čísla.

Riešenia pre homogénnu rekurentnú rovnicu 2. stupňa s konštantnými koeficientami:

$a_{n+2} = M a_{n+1} + N a_n$, $a_k = B_k$, $a_l = B_l$, $k \neq l$, $k, l \geq 0$

Charakteristická rovnica: $x^2 - Mx - N = 0$, korene získame riešením kvadratickej rovnice, t.j. $x_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4N}}{2}$ (známejšie pre $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, kde $D := b^2 - 4ac$ je tzv. *diskriminant*).

Sú tri prípady:

- 2 reálne - u, v

  všeobecné riešenie: $a_n = C_1 u^n + C_2 v^n$

  $(a_k =)$ $B_k = u^k C_1 + v^k C_2$,

  $(a_l =)$ $B_l = u^l C_1 + v^l C_2$.

[1] Verzia: 20101015-1221.

- 1 dvojnásobný reálny - u
  všeobecné riešenie: $a_n = C_1u^n + C_2nu^n$
  $(a_k =)\ B_k = u^k \cdot C_1 + ku^k \cdot C_2,$
  $(a_l =)\ B_l = u^l \cdot C_1 + lu^l \cdot C_2.$
- 2 komplexné (komplexne združené) $z_1 = u + v\mathbf{i}$, $z_2 = u - v\mathbf{i}$, $u, v \in \mathbb{R}$
  všeobecné riešenie: $a_n = C_1z_1^n + C_2z_2^n = C_1(u + v\mathbf{i})^n + C_2(u - v\mathbf{i})^n$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$
  $(a_k =)\ B_k = z_1^k \cdot C_1 + z_2^k \cdot C_2$
  $(a_l =)\ B_l = z_1^l \cdot C_1 + z_2^l \cdot C_2$

Nehomogénne rovnice 1. rádu – „konštantné" koeficienty

- Tvar:

$$a_n = ka_{n-1} + f(n),$$

$k \in \mathbb{R}$, $f(x)$ - funkcia, počiatočná podmienka: $a_0 = g_0 \in \mathbb{R}$

Riešenie:

Zavedieme substitúciu: $a_n = k^n y_n$. Počiatočná podmienka pre y_n: $y_0 = k^0 y_0 = a_0 = g_0$, t.j. $y_0 = g_0$.

Rovnica sa prevedie na tvar $\overbrace{k^n y_n}^{a_n} = k \cdot \overbrace{k^{n-1} y_{n-1}}^{a_{n-1}} + f(n) = k^n y_{n-1} + f(n)$
Vydelením k^n dostávame novú rekurentnú rovnicu:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{f(n)}{k^n},\ y_0 = g_0$$

Do nej postupne dosádzame hodnoty n rovné $n-1, n-2, ..., 1$:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{f(n)}{k^n} = \overbrace{y_{n-2} + \frac{f(n-1)}{k^{n-1}}}^{y_{n-1}} + \frac{f(n)}{k^n} = \overbrace{y_{n-3} + \frac{f(n-2)}{k^{n-2}}}^{y_{n-2}} + \frac{f(n-1)}{k^{n-1}} + \frac{f(n)}{k^n} = \cdots =$$
$$= \underbrace{y_2 + \frac{f(3)}{k^3}}_{y_3} + \sum_{i=4}^{n} \frac{f(i)}{k^i} = \underbrace{y_1 + \frac{f(2)}{k^2}}_{y_2} + \sum_{i=3}^{n} \frac{f(i)}{k^i} = \underbrace{y_0 + \frac{f(1)}{k^1}}_{y_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{f(i)}{k^i} = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{k^i}$$

Teda celkovo dostávame riešenie v nasledujúcom tvare:

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{k^i}.$$

Vypočítame súčet (napr. pomocou metódy z nasledujúceho odstavca):

$$y_n = g(n),\ \text{pre } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dosadíme získané riešenie spätne do substitúcie, čím dostávame riešenie zadanej rekurencie:

$$a_n = k^n \cdot y_n = k^n \cdot g(n), n \in \mathbb{N}_0.$$

Nehomogénne rovnice 1. rádu – nekonštantné koeficienty

- $a_n = b_n a_{n-1} + f(n)$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, počiatočná podmienka: $a_0 = g_0 \in \mathbb{R}$.

  Riešenie:

  Substitúcia: $a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \cdot y_n$

$$\overbrace{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \cdot y_n}^{a_n} = b_n \cdot \overbrace{(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot y_{n-1})}^{a_{n-1}} + f(n)$$

  Nová rekurentná rovnica (delenie $b_1 \cdot b_2 \ldots \cdot b_n$):

$$y_n = y_{n-1} + \frac{f(n)}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}, y_0 = a_0 = g_0$$

  Teda,

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_i}$$

  Spočítanie súčtu:

$$y_n = g(n), \text{ pre } n \in \mathbb{N}_0$$

  Spätné dosadenie do substitúcie, riešenie a_n:

$$a_n = (b_1 \cdot \ldots \cdot b_n) \cdot y_n = (b_1 \cdot \ldots \cdot b_n) \cdot g(n).$$

Súčty radov a konečných postupností

- $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, pre $x \neq 1$
- $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, $x \in \mathbb{R}$ • $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$, $|x| < 1$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k$, $x \in \mathbb{R}$ • $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k$, $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}(-1)^{k+1}$, $|x| < 1$ atď.
- konečné sumy možno derivovať, integrovať člen po člene
- v rámci polomeru konvergencie možno derivovať a integrovať člen po člene aj rady:
- $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
- $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C$
- Definujeme operátor $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^i$, $i \in \mathbb{N}_0$ pomocou indukcie:

  $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0 \Big(f(x)\Big) = f(x),$

  $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^1 \Big(f(x)\Big) = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \Big(f(x)\Big) = x \cdot f'(x),$

  $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \Big(f(x)\Big) = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \left(\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{k-1} \Big(f(x)\Big)\right)$, pre $k \geq 1$.

- Jeho aplikovaním na konečné súčty a rady dostávame (opäť indukciou vieme dokázať):

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot a_nx^n$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)&=\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{k-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\right)=\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}n^{k-1}\cdot a_nx^n\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}n^k\cdot a_nx^n\end{aligned}$$

- Na druhej strane, pokiaľ existuje súčet radu/konečnej postupnosti ako funkcia od x, t.j. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=g(x)$, tak aplikovaním mocnín $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ na túto funkciu sme schopní vypočítať súčet

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(A_ni^n+A_{n-1}i^{n-1}+\ldots+A_1i+A_0\Big)\cdot a_im^i,\text{ kde}$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$, $m\in\mathbb{R}$, pričom m patrí do polomeru konvergencie radu, prípadne do definičného oboru funkcie $g(x)$ pre súčty konečných postupností. Platí:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\infty}(A_ni^n+A_{n-1}i^{n-1}+\ldots+A_1i+A_0)\cdot a_im^i=A_n\cdot\sum_{i=0}^{\infty}i^n\cdot a_im^i+A_{n-1}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}i^{n-1}\cdot a_im^i+\cdots\\&+A_1\cdot\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot a_im^i+A_0\cdot\sum_{i=0}^{\infty}a_im^i=A_n\cdot\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\Big(g(x)\Big)_{x=m}+A_{n-1}\cdot\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n-1}\Big(g(x)\Big)_{x=m}+\cdots\\&+A_1\cdot\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\Big(g(x)\Big)_{x=m}+A_0\cdot\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\Big(g(x)\Big)_{x=m}\\&=\left[A_n\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n+\cdots+A_1\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+A_0\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\right]\Big(g(x)\Big)_{x=m}.\end{aligned}$$

Typy príkladov:

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a_ki^k+a_{k-1}i^{k-1}+\ldots+a_1i+a_0)b^i}{i!}$, t.j. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(p_n(i)\cdot\frac{b^i}{i!}\right)$, kde p_n je polynóm n-tého stupňa.

Riešenie: Základ tvorí funkcia $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x$. Preto je súčet rovný:

$$\left[a_k\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k+a_{k-1}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{k-1}+\ldots+a_1\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+a_0\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\right]\left(e^x\right)_{x=b}=\left[p_n\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]\left(e^x\right)_{x=m}$$

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(a_ki^k+a_{k-1}i^{k-1}+\ldots+a_1i+a_0)b^i=\sum_{i=0}^{\infty}\Big(p_n(i)\cdot b^i\Big)$, $|b|<1$, p_n je polynóm n-tého stupňa

Riešenie: Základ tvorí funkcia $\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}$, pre $|x|<1$. Preto je súčet rovný:

$$\left[a_k\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k+a_{k-1}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{k-1}+\ldots+a_1\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+a_0\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\right]\left(\tfrac{1}{1-x}\right)_{x=b}=\left[p_n\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]\left(\tfrac{1}{1-x}\right)_{x=m}$$

- $\sum_{i=0}^{n}(a_k i^k + a_{k-1}i^{k-1} + \ldots + a_1 i + a_0)b^i = \sum_{i=0}^{n}\left(p_n(i)\cdot b^i\right)$, $b \neq 1$

Riešenie:Základ tvorí funkcia $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, pre $x \neq 1$. Preto je súčet rovný:

$$\left[a_k\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k + a_{k-1}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{k-1} + \ldots + a_1\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + a_0\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\right]\left(\tfrac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)_{x=b} = \left[p_n\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]\left(\tfrac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)_{x=m}$$

Hodnoty $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ pre niektoré funkcie

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\left(\tfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \tfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = x^n\left(\tfrac{x}{x-1}\right) - \tfrac{1}{x-1}$$

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\tfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \tfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2} = x^n\left(\tfrac{x}{x-1}n - \tfrac{x}{(x-1)^2}\right) + \tfrac{x}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) &= \frac{-n^2x^{n+3} + (2n^2+2n-1)x^{n+2} - (n+1)^2x^{n+1} + x^2 + x}{(1-x)^3}\\ &= x^n\left(\frac{x}{x-1}n^2 - \frac{2x}{(x-1)^2}n + \frac{x(x+1)}{(x-1)^3}\right) - \frac{x(x+1)}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

Poznámka: $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$ je vyjadriteľná v tvare $x^n\cdot p_k(n) + C$, kde $p_k(n)$ je polynóm k-teho stupňa a C je nejaká konštanta. Preto výsledky riešení rekurencií 1. rádu, kde nehomogénna časť je polynóm k-teho rádu možno vyjadriť v tvare $x_n = q_k(n) + C\beta^n$, kde β je koeficient použitý pri substitúcii a q_k polynóm k-teho stupňa.

$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(e^x) = xe^x$, $\quad\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2(e^x) = x(x+1)e^x$, $\quad\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^3(e^x) = x(x^2+3x+1)e^x$

$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$, $\quad\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $\quad\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^3\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$.

Substitučná metóda

- Odhadne sa riešenie v tvare $\Omega(f(n))$, $\Theta(f(n))$, $O(f(n))$ a dokáže sa, že je správne. Možno použiť aj na rekurentné nerovnosti.

Príklad: $T(n+1) = T(n) + n^2$, $n \geq 1$, $T(0) = 0$.

Skúsime najprv odhad: $T(n) = O(n^2)$, t.j. $T(n) \leq Cn^2$ pre nejaké $C > 0$ od istého n_0.

Potom $T(n+1) \leq Cn^2 + n^2 = (C+1)n^2 = C(n+1)^2 - 2Cn - C + n^2$. Aby bola splnená nerovnosť, muselo by od istého n_0 existovať $C > 0$ také, že $(C(2n+1) - n^2 \geq 0$, ale $2n+1 \prec n^2$, preto také C neexistuje, presnejšie, pre každé nami zvolené $C > 0$ nájdeme n_0 od ktorého táto nerovnosť nie je splnená. Napr. pre $C = 10$, $C \geq \frac{n^2}{2n+1} = \frac{1}{4}\frac{4n^2-1+1}{2n+1} = \frac{1}{4}(2n-1) + \frac{1}{4(2n+1)} = \frac{1}{2}(n - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4(2n+1)}$, teda pre $n > 20$ dôjde k poruženiu nerovnosti. (Vo všeobecnosti, keď pre pevne zvolené C platí $C < \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2n+1)} \leq \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, t.j. pre $n > 2C$ dôjde k porušeniue nerovnosti.) Preto $T(n) \neq O(n^2)$.

Druhý odhad: $T(n) = \Theta(n^3)$. Musíme dokázať, že $T(n) = \Omega(n^3)$ a $T(n) = O(n^3)$.

O: Potom $T(n+1) \leq Cn^3 + n^2 = C(n+1)^3 - 3Cn^2 - 3Cn - C + n^2 = C(n+1)^3 - (C(3n^2 + 3n+1) - n^2)$. T.j. hľadáme $C > 0$ a n_0, pre ktoré by platilo $C(3n^2+3n+1) - n^2 \geq 0$. Potom stačí zvoliť $C \geq \frac{1}{3}$ a nerovnosť je splnená pre $n \geq 0$.

Ω: Hľadáme $C > 0$ a n_0 také, že pre $n \geq n_0$ je $T(n) \geq Cn^3$. $T(n+1) = T(n) + n^2 \geq Cn^3 + n^2 = C(n+1)^3 - 3n^2C - 3nC - C + n^2 \geq C(n+1)^3$, ak $n^2 - C(3n^2+3n+1) \geq 0$, t.j. $C \leq \frac{n^2}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Preto napr. pre $n \geq 1$ je $\frac{1}{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{3+\frac{3}{1}+\frac{1}{1^2}} = \frac{1}{7}$. Preto pre $C = \frac{1}{7}$ a $n_0 = 1$ platí Ω.

Preto je riešením Θ, pre napr. $C_1 = \frac{1}{7}$, $C_2 = \frac{1}{3}$ a $n_0 = 1$.

• Niekedy pri dôkaze $T(n) = O(f(n)$ alebo $\Omega(f(n))$ je potrebné uvažovať odhady typu $Cf(n) \pm g(n)$, kde $g(n) = o(f(n))$. (Príklad rekurencie: $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$. Pri pokuse dokázať $T(n) = O(n)$ v tvare $T(n) \leq Cn$ sa to nepodarí. Treba použiť odhad $T(n) \leq Cn - D$, potom sa to už podarí dokázať.) (Použije sa rovnosť $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$, pre n celé.)

• Občas je najprv potrebné v rekurencií zvoliť substitúciu, aby sme ju previedli na už známu rekurenciu, a tým vedeli zistiť odhad riešenia.

Príklad: $T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \lg n$ (kde $\lg n$ je $\log_2 n$)

Zavedieme substitúciu $n = 2^m$, potom

$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$, preto ak označíme $S(m) = T(2^m)$ dostaneme novú rekurenciu $S(m) = 2S(m/2) + m$.

Jej riešenie je $S(m) = O(m \lg m)$ (napr. pomocou Master Theorem). Keďže $m = \lg n$, preto $T(n) = O(\lg n \lg \lg n)$.

Rekurentné nerovnosti a substitučná metóda

• Hľadáme riešenie v tvare $x_n = O(\alpha^n))$ $(\Omega(\alpha^n))$.

POZOR! Metódu možno použiť pre rekurencie s nezápornými koeficientami pri x_i na pravej strane, pretože z toho, že $x_n \leq C\alpha^n$ nevyplýva, že $-x_n \leq -C\alpha^n$, ale platí práve opačná nerovnosť, t.j. $-x_n \geq -C\alpha^n$.

(Nie najšťastnejší príklad:)

Príklad: $x_{n+2} \leq 4x_{n+1} - 3x_n + n^3$, $x_0 = 5$, $x_1 = 7$.

Riešenie:

Keď dosadíme do rekurencie, tak dostávame nerovnosť $x_2 \leq 13$. Keďže nemáme ohraničenie na hodnoty x_2, tak x_2 môže byť ľubovoľne malé záporné číslo, čiže sa nám nepodarí ohraničiť $|x_2|$ nejakým násobkom nejakej (ani exponenciálnej) funkcie. Toto zadanie preto nemá riešenie.

(Nie najšťastnejší príklad II:)

Príklad: $x_{n+2} \leq 4x_{n+1} - 3x_n + n^3$, $x_0 = 5$, $x_1 = 7$, naviac predpokladáme, že $x_n \geq 0$, pre $n \in \mathbb{N}_0$.

Riešenie:

Hľadáme odhad v tvare $x_n = O(\alpha^n)$, preto $x_n \leq C\alpha^n$ od istého n_0.

$x_{n+2} \leq 4x_{n+1} - 3x_n + n^3 \leq 4C\alpha^{n+1} + n^3 \leq C\alpha^{n+2} - (C\alpha^{n+2} - 4C\alpha^{n+1} - n^3) = C\alpha^{n+2} - (C\alpha^{n+1}(\alpha - 4) - n^3) \leq C\alpha^{n+2}$, ak $C\alpha^{n+1}(\alpha - 4) - n^3 \geq 0$. Táto nerovnosť je splniteľná za predpokladu, že $\alpha - 4 > 0$ a $n^3 = O(\alpha^n)$, t.j. $\alpha > 1$. Spojením týchto dvoch nerovností máme, že pre $\alpha > 4$ je splnená pre nejaké $C > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$.

Zvoľme si pevné $\alpha_0 > 4$. Ak si označíme $C_0 = \max_{n \geq 0} \frac{n^3}{\alpha_0^{n+1}(\alpha_0 - 4)}$, tak na to, aby bola splnená nerovnosť $x_n \leq C\alpha_0^n$ pre všetky prirodzené $n \in \mathbb{N}$, musíme ešte zabezpečiť jej platnosť pre počiatočné podmienky, t.j. $|x_0| \leq C\alpha_0^0 = C$ a $|x_1| \leq C\alpha_0^1 = C\alpha_0$. Preto keď zvolíme $\hat{C} = \max\{C_0, |x_0|, \frac{|x_1|}{\alpha_0}\}$, tak sa nám podarí substitučnou metódou (t.j. indukciou) dokázať odhad $|x_n| \leq \hat{C}\alpha_0^n$, t.j. $x_n = O(\alpha_0^n)$.

Hľadanie C_0: Pre $n \in \mathbb{N}$ si označíme $y_n = \frac{n^3}{\alpha_0^{n+1}(\alpha_0 - 4)}$. Potom $y_0 = 0$, čiže maximum nám stačí hľadať pre $n \geq 1$. Pre $n \geq 1$ skonštruujeme podiel $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{\alpha_0}$. Funkcia $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ je klesajúca, preto existuje najmenšie n_0, od ktorého platí $\frac{y_{n_0+1}}{y_{n_0}} \leq 1$. Čiže pre $k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ je podiel $\frac{y_{k+1}}{y_k} > 1$ a pre $k \geq n_0$ zase $\frac{y_{k+1}}{y_k} \leq 1$. T.j. $y_1 < y_2 < \ldots y_{n_0 - 1} < y_{n_0}$ a $y_{n_0} \geq y_{n_0+1} \geq \ldots$. Preto y_{n_0} je hľadané maximum a C_0 môžeme zvoliť ľubovoľné, väčšie rovné od y_{n_0}.

Poznámka: Riešenie predošlej úlohy je rovnaké ako riešenie rekurentnej nerovnice $x_{n+2} \leq 4x_{n+1} + n^3$, $x_0 = 5$, $x_1 = 7$.

Príklad: $x_{n+2} \leq 4x_{n+1} + 3x_n + n^3$, $x_0 = 1$, $x_1 = 10$.
Riešenie:

Hľadáme odhad v tvare $x_n = O(\alpha^n)$, preto $x_n \leq C\alpha^n$ od istého n_0. Dosadíme tento odhad pre x_{n+1} a x_n do rekurentného vzťahu (indukciou predpokladáme, že tento odhad platí pre všetky x_k, kde $k < n+2$ a chceme potvrdiť, že to platí aj pre x_{n+2}, t.j. indukčný krok):

$x_{n+2} \leq 4x_{n+1} + 3x_n + n^3 \leq 4C\alpha^{n+1} + 3C\alpha^n + n^3 = C\alpha^n(4\alpha+3) + n^3 = C\alpha^{n+2} - C\alpha^{n+2} + C4\alpha^{n+1} + 3C\alpha^n + n^3 = C\alpha^{n+2} - (C\alpha^n(\alpha^2 - 4\alpha - 3) - n^3)$.

Ak $\alpha > 1$ ($n^3 = O(\alpha^n)$) a $\alpha^2 - 4\alpha - 3 > 0$, tak od istého n_0 máme splnenú nerovnosť $C\alpha^n(\alpha^2 - 4\alpha + 3) - n^3 \geq 0$, čím dokážeme, že $x_{n+2} \leq C\alpha^{n+2}$.

Kvadratická rovnica (porovnaj s charakteristickou rovnicou pre homogénnu rekurenciu 2. rádu) má korene $2 \pm \sqrt{7}$. Preto riešením kvadratickej nerovnice je $(-\infty, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, \infty)$, čiže hodnoty $\alpha > 2 + \sqrt{7} \doteq 4{,}646$ vyhovujú obom podmienkam. Zvoľme si pevné α_0, ktoré je väčšie ako $2 + \sqrt{7}$.

Hľadáme také C, aby nerovnica $C\alpha_0^n(\alpha_0^2 - 4\alpha_0 - 3) - n^3 \geq 0$ bola splnená pre $n \geq 0$ (pre indexy n, pre ktoré je v platnosti rekurentný vzťah). T.j. $C \geq \frac{n^3}{\alpha_0^n(\alpha_0^2 - 4\alpha_0 - 3)}$. Stačí nám zvoliť $C \geq \max_{n \geq 0} \frac{n^3}{\alpha_0^n(\alpha^2 - 4\alpha_0 - 3)} =: C_0$.

Aby bol splnený odhad $|x_n| \leq C\alpha_0^n$, pre každé n, musíme ešte zobrať do úvahy $|x_0|$, $|x_1|$. Preto $|x_0| \leq C$, a $|x_1| \leq C\alpha_0$. Preto riešením rekurencie je $x_n = O(\alpha_0^n)$, $\alpha_0 > 2 + \sqrt{7}$, t.j. $x_n \leq C\alpha_0^n$ pre $C_{\alpha_0} = \max\{|x_0|, \frac{|x_1|}{\alpha_0}, C_0\}$.

Poznámka: Dôkaz platnosti získaného odhadu prebieha matematickou indukciou. Máme odhad $x_n \leq \hat{C}\alpha_0^n$, pre konkrétne α_0 a $\hat{C} \geq C_{\alpha_0}$. Najprv sa overí správnosť pre počiatočné podmienky, v našom prípade pre x_0 a x_1 (čo bude splnené, keďže $\hat{C} \geq C_{\alpha_0} \geq |x_0|, \frac{|x_1|}{\alpha_0}$). Potom sa predpokladá, že rekurekcia je platná pre všetky x_i, kde $i + 1 \leq n$ (indukčný predpoklad) a dokáže sa, že rekurencia platí pre $i + 2$ (indukčný krok).

$x_{i+2} \leq 4x_{i+1} + 3x_i + n^3 \leq 4\hat{C}\alpha_0^{i+1} + 3\hat{C}\alpha_0^i + i^3 = \hat{C}\alpha_0^{i+2} - [\hat{C}\alpha_0^i(\alpha_0^2 - 4\alpha_0 - 3) - i^3] \leq \hat{C}\alpha_0^{i+2}$, keďže $\hat{C} \geq C_{\alpha_0} \geq C_0$.

Poznámka: Pre konkrétne α_0 sa nám podarí odhadnúť C_0 podobnou metódou ako v predchádzajúcom príklade.

• **Veta** [Wilf, Thm. 1.4.1, p. 20] Postupnosť $\{x_n\}$ je definovaná pomocou rekurencie

$$x_{n+1} \leq b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \ldots + b_p x_{n-p} + G(n), (n \geq p),$$

kde $b_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{p} b_i > 1$. Nech c je kladný koreň rovnice (charakteristický polynóm pre homogénnu rekurentnú rovnicu)

$$x^{p+1} = b_0 x^p + \ldots + b_{p-1} x + b_p$$

a nech $G(n) = o(c^n)$. Potom pre každé pevne zvolené $\varepsilon > 0$ platí: $x_n = O((c+\varepsilon)^n)$.

Master theorem

Riešenie rekurencii v tvare: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ ($\frac{n}{b}$ môže byť aj v tvare $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$, $\lceil \frac{n}{b} \rceil$)

- ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, pre nejaké $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- ak $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, tak $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
- ak $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pre nejaké $\varepsilon > 0$ a existuje $c < 1$ také, že $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ od istého n_0, potom $T(n) = \Theta(f(n))$.

Príklady použitia:

a) $T(n) = 2T(n/2) + 1$

$1 = O(n^{1-\varepsilon})$, pre $0 < \varepsilon \leq 1$, preto $T(n) = \Theta(n)$

b) $T(n) = 2T(n/2) + n$

$n = \Theta(n)$, pre $T(n) = \Theta(n \lg n)$

c) $T(n) = 2T(n/2) + n^2$

$n^2 = \Omega(n^{1+\epsilon})$, $2(\frac{n}{2})^2 = \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}n^2$, preto pre $\frac{1}{2} \leq c < 1$ a ľubovoľné n je splnená nerovnosť v podmienke. Preto $T(n) = \Theta(n^2)$.

d) $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

$n \lg n \neq \Omega(n^{1+\varepsilon})$, pre žiadne $\varepsilon > 0$.
Nemožno teda použiť Master Theorem.

Cvičenia

- 1. Určte charakteristický polynóm a explicitné vyjadrenie a_n:
  (a) $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 10$;
  (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$;
  (c) $a_{n+2} = 4a_n + 4a_{n+1}$, $a_0 = 1$, $a_2 = 12$;
  (d) $a_{n+2} = 12a_n - 4a_{n+1}$, $a_2 = 32$, $a_3 = -224$
  (e) $a_{n+1} = -2a_{n-2} + a_{n-1} + 2a_n$, $a_1 = 0$, $a_2 = 18$, $a_5 = -60$
  (korene ch.p. sú 1, -1, 2)
  (f) $a_{n+3} = 7a_{n+2} - 16a_{n+1} + 12a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 7$, $a_2 = 21$
  (korene ch.p. sú 2, 2, 3)
  (g) $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 12a_{n+1} + 8a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 12$, $a_2 = 44$
  (korene ch.p. sú 2,2,2)
- 2. Určte nasledujúce súčty:
  (a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3i^2-2i+1)}{i!}$, (b) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i^2+10i-5)2^i}{i!}$,
  (c) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(7i^2+5i-10)}{6^i}$, (d) $\sum_{i>1} \frac{(i+1)^2}{2^i}$,
  (e) $\sum_{i=3}^{\infty} \frac{(i-1)(i+1)}{i!}$, (f) $\sum_{i=0}^{n-1}(i+12)3^i$,
  (g) $\sum_{i=0}^{n}(2i^2+5i-44)2^i$, (h) $\sum_{i=2}^{n}(i+1)(i-2)5^i$
- 3. Určte explicitné vyjadrenie a_n:
  (a) $a_{n+1} = 2a_n + n - 10$, $n \geq 0$, $a_0 = 0$
  (b) $a_n = \frac{a_{n-1}}{3} + n + 5$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$
- 4. Zistite:
  (a) Počet núl vyskytujúcich sa v zápise n-miestnych binárnych slov,
  t.j. slov dĺžky n zložených zo znakov 0 a 1.
  (b) Počet všetkých n-miestnych binárnych slov.
  (c) Počet núl v zápise n-ciferného binárneho čísla.
  (d) Počet núl v zápise nanajvýš n-ciferného binárneho čísla,
  t.j. 1 až n-ciferné dvojkové čísla.
  (e) Počet núl v zápise n-miestnych "g-adických"slov,
  t.j. slov dĺžky n zložených zo znakov 0, 1, … $g-1$.
  (f) Počet všetkých n-miestnych g-adických slov.

(g) Počet núl v zápise n-ciferného g-adického čísla.
(h) Počet núl v zápise nanajvýš n-ciferného g-adického čísla.
(i) Najmenší počet ťahov na vyriešenie problému "Hanojské veže".
Tri kolíky, n kotúčov rôznej veľkosti usporiadaných od najväžšieho po najmenší sú umiestnené na prvom kotúči. Treba premiesniť všetky kotúče na 2., či 3. kolík, pričom sa počas jedného ťahu premiestni práve 1 *kotúč (najvyšší z nejakého kolíku) a možno ho premiestniť len na väčší kotúč na inom kolíku, čiže nemožno položiť väčší kotúč na menší.*

• 5. Pomocou substitučnej metódy riešte nasledujúce rekurencie. Pre konkrétne hodnoty α_0 určte aj presnú konštantu C, aby $x_n \leq C\alpha_0^n$.
a) $x_{n+2} \leq 3x_{n+1} + 2x_n + n^5$, $x_0 = 10$, $x_1 = 15$, $\alpha_0 = 3{,}6$
b) $x_{n+1} \leq 7x_n + 12x_{n-1} + n$, $n \geq 1$, $x_0 = 5$, $x_1 = 17$, $\alpha_0 = 8,5$
c) $x_{n+3} \leq 4x_{n+2} + 4x_{n+1} + n^2$, $x_0 = 11$, $x_1 = 20$, $\alpha_0 = 4,83$
d*) $x_{n+3} \leq 4x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n + n^6$, $x_0 = 5$, $x_1 = 7$, $x_2 = 9$, $\alpha_0 = 5,07$
e*) $x_{n+2} \leq 6x_{n+1} + 12x_n + 8x_{n-1} + n^4$, $n \geq 1$, $x_0 = 3$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $\alpha_0 = 7{,}7$
f*) $x_{n+1} \leq 12x_n + 47x_{n-1} + 60x_{n-2} + n^3$, $n \geq 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $\alpha_0 = 15{,}323$
g) $x_n \leq x_{n-1} + x_{n-2} + n^3$, $n \geq 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = O(1)$
h) $x_n \leq x_{n-1} + x_{n-3} + n^3$, $x \geq 3$, $x_0 = 0$, $x_1, x_2 = O(1)$
i) $x_n \leq x_{n-1} + x_{n-4} + n^3$, $x \geq 4$, $x_0 = 0$, $x_1, x_2, x_3 = O(1)$.

• 6. Pomocou Master Theorem riešte nasledujúce rekurencie:
a) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$, b) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$, c) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + 3^n$,
d) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{\lg n}$, e) $T(n) = T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$, f) $T(n) = 9T(\sqrt[3]{n}) + \log_3^2 n$,
g) $T(n) = 9T(\sqrt[3]{n}) + \log_3 n$, h) $T(n) = 25T(\frac{n}{5}) + n^2 \lg n$

• 7. a) Dokážte, že podmienky vo Vete 1.4.1, Wilf, str. 20 zaručujú jednoznačnú existenciu c.
b) Ako by sa zmenilo riešenie rekurencie, ak by neplatila podmienka $G(n) = o(c^n)$?

Riešené príklady

Príklad: *Vypočítajte* $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$ a $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$.

Riešenie:

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = x\frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$x\frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = x\frac{(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)=\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}\right)=$$
$$=x\frac{(n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1)(1-x)^2-(nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x)\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}$$
$$=x\frac{(n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1)(1-x)+2(nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x)}{(1-x)^3}$$
$$=x\frac{x^{n+2}(-n(n+2)+2n)+x^{n+1}(n(n+2)+(n+1)^2-2(n+1))+x^n(-(n+1)^2)+(1-x)+2x}{(1-x)^3}$$
$$=x\frac{-n^2x^{n+2}+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+x+1}{(1-x)^3}$$
$$=\frac{-n^2x^{n+3}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-(n+1)^2x^{n+1}+x^2+x}{(1-x)^3}$$

Príklad: *Zistite* a_n*, keď* $a_{n+1}=3a_n+3n-5$ *a* $a_0=0$*.*

Riešenie:

1) Použijeme substitúciu $a_n=3^ny_n$, teda $a_0=0=3^0y_0=y_0$.
2) $3^{n+1}y_{n+1}=3\cdot 3^ny_{n-1}+3n-5=3^{n+1}y_n+3n-5$. Po vydelení 3^{n+1} dostávame: $y_{n+1}=y_n+\frac{3n-5}{3^{n+1}}$.
3) $y_1=y_0+\left(\frac{3n-5}{3^{n+1}}\right)_{n=0}$, $y_2=y_1+\left(\frac{3n-5}{3^{n+1}}\right)_{n=1}$, $\ldots$, $y_n=y_{n-1}+\left(\frac{3n-5}{3^{n+1}}\right)_{n=n-1}$.
$y_n=y_0+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{3i-5}{3^{i+1}}=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{3i-5}{3^i}$.
4) $y_n=\frac{1}{3}\left[3\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)-5\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\right]\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}}$
5) $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)=\frac{(n-1)x^{n+1}-nx^n+x}{(1-x)^2}$
$3\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}}=\frac{(n-1)3^{-(n+1)}-n3^{-n}+\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=3\frac{3^{-(n+1)}[(n-1)-3n]+\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}(-3^{-n}(1+2n)+1)$
$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}}=\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}}$
$-5\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}}=-5\frac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{15}{2}(1-3^{-n})$
$\frac{9}{4}(-3^{-n}(1+2n)+1)+\frac{15}{2}(3^{-n}-1)=\frac{3^{-n}(-9-18n)+9+30\cdot 3^{-n}-30}{4}=\frac{(21-18n)3^{-n}-21}{4}$.
6) $y_n=\frac{1}{3}\frac{(21-18n)3^{-n}-21}{4}=\frac{(7-6n)3^{-n}-7}{4}$

Výsledok: $a_n=3^ny_n=\frac{7-6n}{4}-\frac{7}{4}3^n$.

Príklad: *Vypočítajte* $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{2i^2-15i+13}{5^i}$.

Riešenie:

1) $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{2i^2-15i+13}{5^i}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2i^2-15i+13}{5^i}-\left(\frac{2i^2-15i+13}{5^i}\right)_{i=0}-\left(\frac{2i^2-15i+13}{5^i}\right)_{i=1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2i^2-15i+13}{5^i}-\frac{2\cdot 0^2-15\cdot 0+13}{5^0}-\frac{2\cdot 1^2-15\cdot 1+13}{5^1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2i^2-15i+13}{5^i}-13$.
2) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2i^2-15i+13}{5^i}=\left[2\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2-15\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+13\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\right]\left(\frac{1}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{5}}$
3) $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}$, $\left(\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)_{x=\frac{1}{5}}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$.
$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^1\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$, $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^1\left(\frac{1}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^2}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{16}{25}}=\frac{5}{16}$
$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$,

$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}+1)}{(1-\frac{1}{5})^3} = \frac{\frac{1}{5}\frac{6}{5}}{\frac{4^3}{5^3}} = \frac{5\cdot 6}{4^3} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}.$

4) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2i^2-15i+13}{5^i} = 2\cdot\frac{15}{32} - 15\cdot\frac{5}{16} + 13\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{16} - \frac{75}{16} + \frac{13\cdot 20}{16} = \frac{200}{16} = \frac{25}{2}.$

Výsledok: $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{2i^2-15i+13}{5^i} = \frac{25}{2} - 13 = \frac{25}{2} - \frac{26}{2} = -\frac{1}{2}.$

Príklad: *Určte a_n, ak $a_n = 12a_{n-1} - 35a_{n-2}$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$.*

Riešenie:

1) $a_n - 12a_{n-1} + 35a_{n-2} = 0$
2) charakteristická rovnica: $x^2 - 12x + 35 = 0$, riešenie $x_{1,2} = \frac{12\pm\sqrt{144-140}}{2} = \frac{12\pm 2}{2} = 6 \pm 1$.
   $x_1 = 5$, $x_2 = 7$.
3) Riešenie a_n hľadáme v tvare $C_1 5^n + C_2 7^n$.
   $7 = a_3 = C_1 5^3 + C_2 7^3$
   $9 = a_4 = C_1 5^4 + C_2 7^4$
4) Riešime sústavu s neznámymi C_1, C_2: $C_1 = \frac{4}{25}$, $C_2 = -\frac{13}{7^3}$.
   Napr. $5\cdot 7 = C_1 5^4 + C_2 5\cdot 7^3$, $9 = C_1 5^4 + C_2 7^4$
   $9 - 35 = -26 = C_2(7\cdot 7^3 - 5\cdot 7^3) = C_2\cdot 2\cdot 7^3$, $C_2 = -\frac{13}{7^3}$.
   $49 = C_1\cdot 7\cdot 5^3 + C_2 7^4$, $9 = C_1\cdot 5^4 + C_2 7^4$
   $49 - 9 = 40 = C_1(7\cdot 5^3 - 5\cdot 5^3) = C_1\cdot 2\cdot 5^3$, $C_1 = \frac{4}{5^2}$.
5) $a_n = \frac{4}{5^2}5^n - \frac{13}{7^3}7^n = 4\cdot 5^{n-2} - 13\cdot 7^{n-3}$.
6) Skúška správnosti:
   $a_3 = 4\cdot 5^{3-2} - 13\cdot 7^{3-3} = 4\cdot 5 - 13 = 7$,
   $a_4 = 4\cdot 5^{4-2} - 13\cdot 6^{4-3} = 4\cdot 5^2 - 13\cdot 7 = 100 - 91 = 9$.

Výsledok: $a_n = 4\cdot 5^{n-2} - 13\cdot 7^{n-3}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad: *Určte počet všetkých binárnych slov dĺžky n.*

Riešenie:

c_n - počet slov dĺžky n
   $c_1 = 2$, $c_n = 2c_{n-1}$, t.j. $c_n = 2^n$
Kombinatorický postup: n pozícií a na každej z nich je buď 0 alebo 1.
   $b_n b_{n-1}\ldots b_1$, $b_i = 0, 1$, t.j. 2^n.

Výsledok: 2^n.

Príklad: *Určte počet núl v zápise binárnych slov dĺžky n.*

Riešenie:

a_n - počet núl v zápise binárnych slov dĺžky n
   $a_1 = 1$
   $b_n|b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1$,
   ak $b_n = 0$, tak $a_{n-1} + 2^{n-1}$ núl; ak $b_n = 1$, tak a_{n-1} núl
   $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$
   $a_n = 2^n y_n$, $1 = a_1 = 2^1 y_1$, $y_1 = \frac{1}{2}$,
   $2^n y_n = 2\cdot 2^{n-1}y_{n-1} + 2^{n-1}$, t.j. $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}$
   $y_n = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2}$.

Výsledok: $a_n = 2^n y_n = n2^{n-1}$

Príklad: *Určte počet núl v zápise n-ciferných binárnych čísel.*

Riešenie:

n-ciferné binárne číslo má na prvej pozícii 1 a na zvyšných pozíciách sa nachádza ľubovoľné slovo dĺžky $n-1$, preto je počet 0 v zápise n-ciferného čísla taký istý ako počet núl v zápisoch binárnych slov dĺžky $n-1$.

d_n - počet núl v zápise n-ciferných binárnych čísel
Výsledok: $d_n = a_{n-1} = (n-1)2^{n-2}$.

Príklad: *Určte počet núl v binárnom zápise čísel* $0, 1, \ldots 2^n - 1$.
Riešenie:

e_n - počet núl v binárnom zápise čísel $0, 1, \ldots, 2^n - 1$

Čísla medzi 2^i a $2^{i+1} - 1$ sú všetky binárne $(i+1)$-ciferné čísla, preto v úlohe nám ide o počet núl v 1-, 2-, až n-ciferných binárnych čísel. Samotná 0 má binárny zápis obsahujúci práve jednu 0, preto platí:

$e_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} d_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} (i-1)2^{i-2} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} i2^{i-1} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i2^i = 1 + \frac{1}{2}\left[\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(1-x)^2}\right)_{x=2} = \ldots = (n-2)2^{n-1} + 2$

Výsledok: $(n-2)2^{n-1} + 2$.

Príklad: *Určte priemerný počet núl v binárnom zápise čísel* $0, 1, \ldots 2^n - 1$ *za sebou, keď* $n \to \infty$.
Riešenie:

Jednoducho je to pomer počtu všetkých núl v zápise 0–$2^n - 1$ a dĺžky takéhoto zápisu. Z predošlej úlohy máme, že počet núl v zápise je $e_n = (n-2)2^{n-1} + 2$.

Čísla 2^i–$2^{i+1} - 1$ majú dĺžku $i+1$ a je ich $2^{i+1} - 1 - 2^i + 1 = 2^i$, preto pre dĺžku tohto zápisu platí:

$f_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)2^i = 1 + \left[\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0\right]\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=2} = 1 + \frac{(n-1)2^{n+1} - n2^n + 2}{(1-2)^2} + \frac{1-2^n}{1-2} = 1 + (2n-2)2^n - n2^n + 2 + 2^n - 1 = (n-1)2^n + 2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)2^{n-1}+2}{(n-1)2^n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-2}{2(n-1)} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)}}{1 + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{2(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}}{2-\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$.

Výsledok: $\frac{1}{2}$.