1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{|x|+|y|}$

$1 \le (1+xy)^{|x|+|y|} \le (1+|xy|)^{|x|+|y|}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+|xy|)^{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+|xy|)^{\frac{1}{|xy|}\cdot\frac{|x||y|}{|x|+|y|}} = e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x||y|}{|x+|y|}} =$

$= e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}}} = e^0 = 1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$

Z vety o majoritnej a minoritnej postupnosti dostávame, že celková limita je 1.

$\boxed{1}$

Zistite, či existuje $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *a určte postupné limity*

$\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)]$ *a* $\lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x,y)]$*:*

2. $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y}, a=\infty, b=\infty$

Limita neexistuje: postupnosť $(k\sqrt{y}, y)$, keď $y\to\infty$: $\lim_{y\to\infty}\frac{k\sqrt{y}+y}{k^2y+y} = \lim_{y\to\infty}\frac{\frac{k}{\sqrt{y}}+1}{k^2+1} = \frac{1}{k^2+1}$. Teda pre rôzne k dostávame rôzne limity.

$\lim_{x\to\infty}[\lim_{y\to\infty}\frac{x+y}{x^2+y}] = \lim_{x\to\infty}[\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x^2}{y}+1}] = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$

$\lim_{y\to\infty}[\lim_{x\to\infty}\frac{x+y}{x^2+y}] = \lim_{y\to\infty}[\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y}{x^2}}] = \lim_{y\to\infty} 0 = 0$

$\boxed{\lim_{xy} \text{ neexistuje}, \lim_x \lim_y = 1, \lim_y \lim_x = 0}$

3. $f(x,y) = \frac{y^x}{1+y^{2x}}, a=0, b=\infty$

Limita neexistuje: postupnosť $(\frac{k}{\ln y}, y)$. Potom $\lim_{y\to\infty}\frac{y^{\frac{k}{\ln y}}}{1+y^{2\frac{k}{\ln y}}} = \lim_{y\to\infty}\frac{e^{\ln y\cdot\frac{k}{\ln y}}}{1+e^{\ln y\cdot\frac{2k}{\ln y}}} = \lim_{y\to\infty}\frac{e^k}{1+e^{2k}}$.

$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to\infty}\frac{y^x}{1+y^{2x}}] = \lim_{x\to 0}[\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{1}{y^x}}{\frac{1}{y^{2x}}+1}] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

$\lim_{y\to\infty}[\lim_{x\to 0}\frac{y^x}{1+y^{2x}}] = \lim_{y\to\infty}[\frac{1}{1+1}] = \frac{1}{2}$

$\boxed{\lim_{xy} \text{ neexistuje}, \lim_x \lim_y = 0, \lim_y \lim_x = \frac{1}{2}}$

4. $f(x,y) = \frac{\sin(\pi x)}{2x+y}, a=\infty, b=\infty$

Platí $-1 \le \sin(\pi x) \le 1$, preto $-\frac{1}{2x+y} \le \frac{\sin(\pi x)}{2x+y} \le \frac{1}{2x+y}$. Limity "krajných" funkcií existujú a sú rovné 0, preto existuje aj limita funkcie v strede a je rovná 0

$\lim_{x\to\infty}[\lim_{y\to\infty}\frac{\sin(\pi x)}{2x+y}] = \lim_{x\to\infty}[\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{\sin(\pi x)}{y}}{\frac{2x}{y}+1}] = \lim_{x\to\infty}\frac{0}{1} = 0$

$\lim_{y\to\infty}[\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(\pi x)}{2x+y}] = \lim_{y\to\infty}[\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin(\pi x)}{x}}{2+\frac{y}{x}}] = \lim_{y\to\infty}\frac{0}{2} = 0$

$\boxed{\lim_{xy} = 0, \lim_x \lim_y = 0, \lim_y \lim_x = 0}$

5. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}, a=0, b=0$

Limita neexistuje: postupnosť (x, kx), $(k \ne 1)$. Potom $\lim_{x\to 0}\frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+k)x}{(1-k)x} = \frac{1+k}{1-k}$

$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y}] = \lim_{x\to 0}[\frac{x}{x}] = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y}] = \lim_{y\to 0}[\frac{y}{-y}] = \lim_{y\to 0} -1 = -1$

$\boxed{\lim_{xy} \text{ neexistuje}, \lim_x \lim_y = 1, \lim_y \lim_x = -1}$

6. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}, a=\infty, b=\infty$

Limita neexistuje: postupnosť $(x, kx), k \ge 0$. Potom $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+k^2x^2}{1+(k-1)^4x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+k^2)\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}+(k-1)^2} = 0$, pre $k \ne 1$, ale pre $k=1$, dostávame, že sa limita rovná $+\infty$.

$\lim_{x\to\infty}[\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}] = \lim_{x\to\infty}[\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4}] =$

$= \lim_{x\to\infty}[\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{x^2}{y^4}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^4}+\frac{x^4}{y^4}-4\frac{x^3}{y^3}+\frac{6x^2}{y^2}-4\frac{x}{y}+1}] = \lim_{x\to\infty}\frac{0}{1} = 0$

$\lim_{y\to\infty}[\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}] = \lim_{y\to\infty}[\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+y^2}{1+x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4}] =$

$\lim_{y\to\infty}[\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^4}+\frac{y^2}{x^4}}{\frac{1}{x^4}+1-4\frac{y}{x}+6\frac{y^2}{x^2}-4\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^4}{x^4}}] = \lim_{y\to\infty} \frac{0}{1} = 0$

$\boxed{\lim_{xy} \text{ neexistuje, } \lim_x \lim_y = 0,\ \lim_y \lim_x = 0}$

7. $f(x,y) = (x+y)\operatorname{tg}\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{1}{y}, a=0, b=0$

Označme $\alpha_n = \operatorname{arctg} n$. Ak skonštuujeme postupnosť $y_n = \frac{1}{\alpha_1+n\pi}$, tak $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0}(x+y)\operatorname{tg}\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{1}{y}] = \lim_{x\to 0} x \operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

Pre $x_n = \frac{1}{\alpha_n+n\pi}$ sa potom táto limita rovná:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n+n\pi}\operatorname{tg}(\alpha_n+n\pi) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\alpha_n+n\pi} = \frac{1}{\pi}$. (Keďže $|a_n| < \frac{\pi}{2}$)

Ak by sme zvolili $y_n = \alpha_2 + n\pi$, tak $\lim_x \lim_y = 2x\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ a zvolením tej istej postupnosti x_n, dostávame limitu $\frac{2}{\pi}$. Preto neexistuje takáto postupná limita. Zámenou označenia sa dokáže, že ani $\lim_y \lim_x$ neexistuje.

Teraz ak súčasne zvolíme $x_n = y_n = \frac{1}{\alpha_n+n^2\pi}$, tak $\lim_{x,y\to(0,0)}(x+y)\operatorname{tg}\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{1}{y} = \frac{\lim_{n\to\infty} n^2}{\alpha n+n^2\pi} = \frac{1}{\pi}$.

Podobne, ak zvolíme $x_n = -y_n = \frac{1}{\alpha_n+n\pi}$, tak dostávame limitu rovnú 0. Takže nemôže existovať ani táto limita.

$\boxed{\lim_{xy} \text{ neexistuje, } \lim_x \lim_y \text{ neexistuje, } \lim_y \lim_x \text{ neexistuje}}$

8. $f(x,y) = \begin{cases} 4-x-y & x\neq 2, y\neq 1 \\ 3 & x=2, y=1 \end{cases}, a=2, b=1$

$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} 4-x-y = 1$. (limita prebieha cez body mimo hľadaného bodu.)
$\lim_{x\to 2}[\lim_{y\to 1} f(x,y)] = \lim_{x\to 2}[\lim_{y\to 1} 4-x-y] = \lim_{x\to 2}[3-x] = 1$
$\lim_{y\to 1}[\lim_{x\to 2} f(x,y)] = \lim_{y\to 1}[\lim_{x\to 2} 4-x-y] = \lim_{y\to 1}[2-y] = 1$

$\boxed{\lim_{xy} = 1,\ \lim_x \lim_y = 1,\ \lim_y \lim_x = 1}$

9. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}, a=0, b=0$

Limita neexistuje: Postupnosť (x, kx), $x\to 0$.
$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$. Hodnota závisí od k.
$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}] = \lim_{x\to 0}[\frac{x\cdot 0}{x^2+0}] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}] = \lim_{y\to 0}[\frac{0\cdot y}{0+y^2}] = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

$\boxed{\lim_{xy} \text{ neexistuje, } \lim_x \lim_y = 0,\ \lim_y \lim_x = 0}$

Určte body nespojitosti:

10. $f(x,y) = \sin\frac{1}{x-y}$

sin je definovaný pre všetky hodnoty, zlomok pre nenulového menovateľa, preto $x-y\neq 0$, t.j. $x\neq y$. Definičný obor funkcie: $D(f) = \{(x,y)\in R^2 : x\neq y\}$. Funkcia je spojitá na svojom definičnom obore.

$\boxed{D(f) = \{(x,y)\in R^2 : x\neq y\}, \text{ spojitá na } D(f)}$

11. $f(x,y) = \frac{x^2+3y^2+5}{y^2-2x}$

Zlomok je definovaný, keď má nenulového menovateľa. Preto $D(f) = \{(x,y)\in R^2 : y^2\neq 2x\}$. Funkcia je spojitá na svojom $D(f)$.

$\boxed{D(f) = \{(x,y)\in R^2 : y^2\neq 2x\}, \text{ spojitá na } D(f)}$

12. $f(x,y) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Definičný obor funkcie je celé R^2. Ak sa bod $(x,y)\neq(0,0)$, tak existuje otvorené okolie, ktoré neobsahuje bod $(0,0)$, a preto sa na jeho body vzťahuje predpis $\cos\frac{1}{x^2+y^2}$. Táto funkcia je definovaná a spojitá pre všetky body mimo $(0,0)$. Zostáva preveriť spojitosť v bode $(0,0)$, t.j. podmienku $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Keďže limita prebieha po bodoch mimo $(0,0)$, tak sa na ňu vzťahuje predpis $\cos\frac{1}{x^2+y^2}$, čiže predošlá rovnosť sa transformuje na overenie $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\frac{1}{x^2+y^2} = 0$, ale táto limita neexistuje. Zoberme si postupnosť bodov tak, že $\frac{1}{x^2+y^2} = 2k\pi$, $k \in N$, t.j. $x^2 + y^2 = \frac{1}{2k\pi}$.(napr. $x = y = \sqrt{\frac{1}{4k\pi}}$). So zvyšujúcim sa k body x, y idú k 0 a limita sa rovná 1. Podobne, ak zoberieme body tak, že $\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in N$, t.j. $x^2 + y^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ (napr. $x = y = \sqrt{\frac{1}{\pi+4k\pi}}$), tak sa limita bude rovnať 0.

$$\boxed{D(f) = R^2,\ \text{spojitá na } R^2 - \{(0,0)\}}$$

13. $z = \frac{x+y}{x-y}$

Zlomok je definovaný, keď má nenulového menovateľa. T.j. $D(f) = \{(x, y) \in R^2 : x \neq y\}$. Funkcia je spojitá na $D(f)$.

$$\boxed{D(f) = \{(x, y) \in R^2 : x \neq y\},\ \text{spojitá na } D(f)}$$

14. $z = \sin \frac{1}{|x|-|y|}$

sin je definovaný na R, zlomok je definovaný, keď má nenulového menovateľa, preto $|x| \neq |y|$ a definičný obor je $D(f) = \{(x, y) : |x| \neq |y|\}$. Funkcia je spojitá na $D(f)$.

$$\boxed{D(f) = \{(x, y) : |x| \neq |y|\},\ \text{spojitá na } D(f)}$$

15. $z = \ln |1 - x^2 - y^2|$

ln je definovaný pre hodnoty väčšie ako 0, preto $|1 - x^2 - y^2| > 0$, čo je splnené, ak $1 - x^2 - y^2 \neq 0$. Preto definičný obor funkcie je $D(f) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$. Funkcia je spojitá na $D(f)$.

$$\boxed{D(f) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 1\},\ \text{spojitá na } D(f)}$$

16. $f(x, y, z) = \frac{3z}{x-2y+3z}$

Zlomok je definovaný a spojitý, v bodoch, v ktorých je jeho menovateľ rôzny od 0. Preto $D(f) = \{(x, y, z) \in R^3 : x - 2y + 3z \neq 0\}$. Funkcia je spojitá na $D(f)$.

$$\boxed{D(f) = \{(x, y, z) \in R^3 : x - 2y + 3z \neq 0\},\ \text{spojitá na } D(f)}$$

Totálny diferenciál:

17. $f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2, A = (-1, 1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y$

$$\mathrm{D}f(\mathbf{x}, A) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(y - A_y)\right)(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x + 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - 1) =$$
$$= -4(x + 1) - 4(y - 1) = -4x - 4y$$

$$\boxed{\mathrm{D}f(\mathbf{x}, A) = -4x - 4y}$$

18. $f(x, y) = e^{xy}, A = (0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}, A) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot (y - 0) = 0(x - 0) + 0(y - 0) = 0$$

$$\boxed{\mathrm{d}f(\mathbf{x}, A) = 0}$$

19. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, A = (0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}, A) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot (y - 0) = 0$$

$$\boxed{\mathrm{d}f(\mathbf{x}, A) = 0}$$

20. $f(x, y, z) = x^5y^3z^3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4y^3z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^5y^2z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^5y^3z^2$

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}, .) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z = 5x^4y^3z^3\mathrm{d}x + 3x^5y^2z^3\mathrm{d}y + 3x^5y^3z^2\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\mathrm{d}f(\mathbf{x},.)=5x^4y^3z^3\mathrm{d}x+3x^5y^2z^3\mathrm{d}y+3x^5y^3z^2\mathrm{d}z}$$

21. $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, preto

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+y^2}$ a zo symetrie $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$

$\mathrm{d}f(\mathbf{x},.)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$

$$\boxed{\mathrm{d}f(\mathbf{x},.)=\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y}$$

22. $f(x,y)=e^{\alpha x}\cos\left(\frac{\beta y}{x}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\alpha e^{\alpha x}\cos\left(\frac{\beta y}{x}\right)+e^{\alpha x}\cdot\left(-\sin\left(\frac{\beta y}{x}\right)\right)\cdot\beta y\cdot\frac{-1}{x^2}=e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\left(\frac{\beta y}{x}\right)+\beta\frac{y}{x^2}\sin\left(\frac{\beta y}{x}\right)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{\alpha x}\cdot\left(-\sin\left(\frac{\beta y}{x}\right)\right)\cdot\frac{\beta}{x}=-e^{\alpha x}\cdot\frac{\beta}{x}\cdot\sin\left(\frac{\beta y}{x}\right)$

$\mathrm{d}f(\mathbf{x},.)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\left(\frac{\beta y}{x}\right)+\beta\frac{y}{x^2}\sin\left(\frac{\beta y}{x}\right)\right)\mathrm{d}x-e^{\alpha x}\cdot\frac{\beta}{x}\cdot\sin\left(\frac{\beta y}{x}\right)\mathrm{d}y$

$$\boxed{\mathrm{d}f(\mathbf{x},.)=e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\left(\frac{\beta y}{x}\right)+\beta\frac{y}{x^2}\sin\left(\frac{\beta y}{x}\right)\right)\mathrm{d}x-e^{\alpha x}\cdot\frac{\beta}{x}\cdot\sin\left(\frac{\beta y}{x}\right)\mathrm{d}y}$$

23. $f(x,y,z)=\mathrm{arctg}\left(\frac{yz}{x^2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\left(\frac{yz}{x^2}\right)^2}\cdot yz\cdot\frac{-2}{x^3}=\frac{x^4}{y^2z^2}\cdot yz\cdot\frac{-2}{x^3}=-2\frac{x}{yz}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\left(\frac{yz}{x^2}\right)^2}\cdot\frac{z}{x^2}=\frac{x^4}{y^2z^2}\cdot\frac{z}{x^2}=\frac{x^2}{y^2z}$, $\quad\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\left(\frac{yz}{x^2}\right)^2}\cdot\frac{y}{x^2}=\frac{x^4}{y^2z^2}\cdot\frac{y}{x^2}=\frac{x^2}{yz^2}$

$\mathrm{d}f(\mathbf{x},.)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z=-2\frac{x}{yz}\mathrm{d}x+\frac{x^2}{y^2z}\mathrm{d}y+\frac{x^2}{yz^2}\mathrm{d}z$

$$\boxed{\mathrm{d}f(\mathbf{x},.)=-2\frac{x}{yz}\mathrm{d}x+\frac{x^2}{y^2z}\mathrm{d}y+\frac{x^2}{yz^2}\mathrm{d}z}$$

Vypočítajte približne:

Aplikácia totálneho diferenciálu pre približný výpočet hodnoty funkcie: $f(x)\doteq f(A)+\mathrm{d}f(x,A)$, (pre x s nejakého malého okolia bodu A) t.j. $f(x)\doteq f(A)+\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x-A_x)+\frac{\partial f}{\partial y}(A)(y-A_y)+\ldots$, (ďalšie zložky diferenciálu, ak viac premenných)

24. $\sqrt{3{,}03^2+9{,}01^2}$

Funkcia $\sqrt{x^2+y^2}$ na okolí bodu $(3,9)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, zo symetrie: $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\mathrm{d}f(\mathbf{x},(3,9))=\frac{\partial f}{\partial x}(3,9)(x-3)+\frac{\partial f}{\partial y}(3,9)(y-9)=\frac{3}{\sqrt{90}}(x-3)+\frac{9}{\sqrt{90}}(y-9)$

$f(3{,}03,9{,}01)\doteq f(3,9)+\mathrm{d}f((3{,}03,9{,}01),(3,9))=\sqrt{90}+\frac{3}{\sqrt{90}}(3{,}03-3)+\frac{9}{\sqrt{90}}(9{,}01-9)=3\sqrt{10}+\frac{0{,}09}{3\sqrt{10}}+\frac{0{,}09}{3\sqrt{10}}=3\sqrt{10}+\frac{0{,}18}{3\sqrt{10}}=3\sqrt{10}+\frac{0{,}06}{\sqrt{10}}=\frac{30{,}06}{\sqrt{10}}\doteq 9{,}5058066$. "Skutočná" hodnota: 9,5058403

$$\boxed{\frac{30{,}06}{\sqrt{10}}\doteq 9{,}5058066-9{,}5058403}$$

25. $1{,}05^{2{,}01}$

Funkcia x^y na okolí bodu $(1,2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(e^{y\ln x})=e^{y\ln x}\cdot\frac{y}{x}=x^y\cdot\frac{y}{x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{y\ln x})=e^{y\ln x}\cdot\ln x=x^y\cdot\ln x$

$\mathrm{d}f(\mathbf{x},(1,2))=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)=2(x-1)+0(y-2)=2(x-1)$

$f(1{,}05;2{,}01)\doteq f(1,2)+\mathrm{d}f(\mathbf{x},(1,2))(1{,}05;2{,}01)=1+2(1-1{,}05)=1+0{,}1=1{,}1$

"Presná" hodnota: 1,103038

$$\boxed{1{,}1\text{ - }1{,}103038}$$

26. $\sin 151^\circ\,\mathrm{cotg}\,41^\circ$

Funkcia $\sin x\,\mathrm{cotg}\,y$ na okolí bodu $(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{4})$, t.j. 150° a 45°

$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x\,\mathrm{cotg}\,y=\frac{\cos x\cos y}{\sin y}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}=-\sin x\frac{1}{\sin^2 y}=-\frac{\sin x}{\sin^2 y}$

$\mathrm{d}f(\mathbf{x},(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{4}))=\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{4})(x-\frac{5\pi}{6})+\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{5\pi}{6})-\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}(y-\frac{\pi}{4})=$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{5\pi}{6}) - (y - \frac{\pi}{4})$
$f(151°, 41°) = f(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{180}) \doteq f(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} + 4\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + (4 - \frac{\sqrt{3}}{2})\frac{\pi}{180} \doteq 0{,}554698$
"Presná" hodnota: 0,5577097

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{8-\sqrt{3}}{360}\pi \doteq 0{,}554698 - 0{,}5577097}$$

27. $\ln(\sqrt{0{,}96} + \sqrt[3]{1{,}02} + 2)$
Funkcia $\ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + 2)$ na okolí $(1, 1)$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1,1) = \frac{1}{8}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+2} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\right)(1,1) = \frac{1}{12}$
$f(0{,}96, 1{,}02) \doteq \ln 4 + \frac{1}{8}(-0{,}04) + \frac{1}{12} \cdot 0{,}02 = 2\ln 2 - 0{,}005 + \frac{1}{600} \doteq 1{,}38296$
"Presná" hodnota: 1,3827932

$$\boxed{2\ln 2 + \frac{1}{600} - 0{,}005 \doteq 1{,}38296 - 1{,}38279}$$

Diferenciál vyšších rádov
$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A)$:

28. $f(x, y) = e^{xy}, A = (0, 0)$
$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot (x - A_x) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (y - A_y)\right)^2 (f)(A) =$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - A_x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - A_x)(y - A_y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y - A_y)^2.$
$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0$
$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = 2 \cdot 1 \cdot (x - 0)(y - 0) = 2xy$

$$\boxed{\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = 2xy}$$

29. $f(x, y, z) = xy + yz + xz, \ A = (1, 1, 0)$
$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot (x - A_x) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (y - A_y) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot (z - A_z)\right)^2 (f)(A) =$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \cdot (x - A_x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \cdot (x - A_x)(y - A_y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \cdot (y - A_y)^2 +$
$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A)(x - A_x)(z - A_z) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A)(y - A_y)(z - A_z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z(A)(z - A_z)^2$
$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 1$
$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = 2(x-1)(y-1) + 2(x-1)(z-0) + 2(y-1)(z-0) = 2xy - 2x - 2y + 2 + 2xz - 2z + 2yz - 2z =$
$= 2(xy + xz + yz - x - y - 2z + 1)$

$$\boxed{\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = 2(xy + xz + yz - x - y - 2z + 1)}$$

30. $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2}, A = (1, 1 - 2)$
Vzorec viď. riešenie príkladu **29**.
$\frac{\partial f}{\partial x} = z(-1)(x^2 + y^2)^{-2}2x = -\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z(-1)(x^2 + y^2)^{-2}2y = -\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x^2+y^2}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2z\frac{(x^2+y^2)^2 - x(2)(x^2+y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^4} = -2z\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-4x^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -2z\frac{y^4-2x^2y^2-3x^4}{(x^2+y^2)^4}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -1$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2z\frac{(x^2+y^2)^2 - y \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = -2z\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y^2-4y^4}{(x^2+y^2)^4} = -2z\frac{x^4-2x^2y^2-3y^4}{(x^2+y^2)^4}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -1$
$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2xz \cdot (-2)(x^2 + y^2)^{-3} \cdot 2y = \frac{8xyz}{(x^2+y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A) = -\frac{1}{2}$
$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = -(x-1)^2 - (y-1)^2 + 2 \cdot 2(x-1)(y-1) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)(z+2) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(y-1)(z+2) =$
$-(x-1)^2 - (y-1)^2 + 4(x-1)(y-1) - (x-1)(z+2) - (y-1)(z+2) = -x^2 + 2x - 1 - y^2 + 2y - 1 + 4xy -$
$4x - 4y + 4 - xz - 2x + z + 2 - yz - 2y + z + 2 = -x^2 - y^2 + 4xy - xz - yz - 4x - 4y + 2z + 6$

$$\boxed{\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = -x^2 - y^2 + 4xy - xz - yz - 4x - 4y + 2z + 6}$$

31. $f(x,y) = x^2y^2, A = (1,1)$
Vzorec viď. riešenie príkladu **28**.
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 2$
$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = 2(x-1)^2 + 2 \cdot 4(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2 = 2x^2 + 8xy + 2y^2 - 12x - 12y + 12$

$$\boxed{\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A) = 2x^2 + 8xy + 2y^2 - 12x - 12y + 12}$$

$\mathrm{d}^3 f(\mathbf{x}, A)$:
32. $f(x,y,z) = xyz, A = (7, 11, -10)$
$\mathrm{d}^3 f(\mathbf{x}, A) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot (x - A_x) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (y - A_y) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot (z - A_z)\right)^3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A) \cdot (x - A_x)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A) \cdot (y - A_y)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(A) \cdot (z - A_x)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A) \cdot (x - A_x)^2 (y - A_y) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(A) \cdot (x - A_x)(y - A_y)^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(A) \cdot (x - A_x)^2 (z - A_z) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(A) \cdot (x - A_x)(z - A_z)^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(A) \cdot (y - A_y)^2 (z - A_z) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(A) \cdot (y - A_y)(z - A_z)^2 + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(A)(x - A_x)(y - A_y)(z - A_z)$
$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \ \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \ \frac{\partial f}{\partial z} = xy$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} = 0, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 1$
$\mathrm{d}^3 f(\mathbf{x}, A) = 6(x-7)(y-11)(z+10)$

$$\boxed{\mathrm{d}^3 f(\mathbf{x}, A) = 6(x-7)(y-11)(z+10)}$$

McLaurinov rozvoj
Taylorov rozvoj: $\mathrm{T}(f, n, A) = \frac{f(A)}{0!} + \frac{\mathrm{d}f(\mathbf{x}, A)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}, A)}{2!} + \ldots + \frac{\mathrm{d}^n f(\mathbf{x}, A)}{n!}$
McLaurin = Taylor v $A = (0, 0, \ldots, 0)$
33. $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2), n = 5$
Označme $C := \cos(x^2 + y^2)$ a $S := \sin(x^2 + y^2)$. Potom:
$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xS, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -2yS, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2S - 2xC2x = -2S - 4x^2C,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2yC2x = -4xyC, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2S - 2yC2y = -2S - 4y^2C$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -2C2x - 8xC - 4x^2(-S)2x = -12xC + 8x^3S$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -2C2y - 4x^2(-S)2y = -4yC + 8x^2yS, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -2C2x - 4y^2(-S)2x = -4xC + 8xy^2S$
$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -2C2y - 8yC - 4y^2(-S)2y = -12yC + 8y^3S$
$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = -12C - 12x(-S)2x + 24x^2S + 8x^3C2x = (16x^4 - 12)C + 48x^2S$
$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = -12x(-S)2y + 8x^3C2y = 24xyS + 16x^3yC$
$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = -4C - 4y(-S)2y + 8x^2S + 8x^2yC2y = (16x^2y^2 - 4)C + (8x^2 + 8y^2)S$
$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = -4x(-S)2y + 8x2yS + 8xy^2C2y = 24xyS + 16xy^3C$
$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = -12C - 12y(-S)2y + 24y^2S + 8y^3C(2y) = (16y^4 - 12)C + 48y^2S$
$\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} = 64x^3C + (16x^4 - 12)(-S)2x + 96xS + 48x^2C2x = 160x^3C + (-32x^5 + 120x)S$
$\frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y} = (16x^4 - 12)(-S)2y + 8x^2C2y + 16yS + 8y^2C2y = (16x^2y + 16y^3)C + (-32x^4y + 40y)S$
$\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2} = 24xS + 24xyC2y + 16x^3C + 16x^3y(-S)2y = (16x^3 + 48xy^2)C + (-32x^3y^2 + 24x)S$
Zo symetrie:
$\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3} = (16y^3 + 48x^2y)C + (-32x^2y^3 + 24y)S, \ \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4} = (16xy^2 + 16x^3)C + (-32xy^4 + 40x)S$
$\frac{\partial^5 f}{\partial y^5} = 160y^3C + (-32y^5 + 120y)S$
Hodnoty derivácií sú rovné 0, až na:
$f(0,0) = 1, \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = -12, \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = -4.$

Teda všetky diferenciály okrem nultého a štvrtého sú 0.
$d^4f(\mathbf{x},(0,0)) = -12x^4 + 6\cdot(-4)x^2y^2 - 12y^4 = -12(x^4+2x^2y^2+y^4) = -12(x^2+y^2)^2$
$T(f,5,(0,0)) = 1 + \frac{1}{4!}(-12)(x^2+y^2)^2 = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$

$$\boxed{T(f,5,(0,0)) = 1 - \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2}$$

34. $f(x,y) = e^x\sin y, n = 3$
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x\sin y$, v $(0,0)$ sa rovnajú 0.
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = e^x\cos y$, v $(0,0)$ sa rovnajú 1.
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = -e^x\sin y$, v $(0,0)$ sa rovnajú 0
$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -e^x\cos y$, v $(0,0)$ sa rovná -1
$f(0,0) = 0$, $df(\mathbf{x},(0,0)) = y$, $d^2f(\mathbf{x},(0,0)) = 2xy$, $d^3f(\mathbf{x},(0,0)) = 3x^2y - y^3$
$T(f,3,(0,0)) = \frac{1}{1!}y + \frac{1}{2!}2xy + \frac{1}{3!}(3x^2y - y^3) = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3!}y^3$

$$\boxed{T(f,3,(0,0)) = y + xy + \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{3!}y^3}$$

35. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy, n = 3$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = 0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6$
Hodnoty parciálnych derivácií v bode $(0,0)$ sú rovné:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -2,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6$
$T(f,3,(0,0)) = f(0,0) + \frac{1}{1!}df(\mathbf{x},(0,0)) + \frac{1}{2!}d^2f(\mathbf{x},(0,0)) + \frac{1}{3!}d^3f(\mathbf{x},(0,0)) =$
$= \frac{1}{2!}(2\cdot(-2)(x-0)(y-0)) + \frac{1}{6!}(6(x-0)^3 + 6(y-0)^3) = x^3 + y^3 - 2xy$

$$\boxed{T(f,3,(0,0)) = x^3 + y^3 - 2xy}$$

Taylorov rozvoj:

36. $f(x,y) = x^y$, $A = (1,1)$, $n = 2$
$f(x,y) = x^y = e^{y\ln x}$
$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y\ln x}\cdot\frac{y}{x}$, v A je 1, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{y\ln x}\ln x$, v A je 0,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(e^{y\ln x}\frac{y}{x}\frac{1}{x} - e^{y\ln x}\frac{1}{x^2}) = \frac{y}{x^2}e^{y\ln x}(y-1)$, v A je 0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{1}{x}\left(e^{y\ln x}\ln x\cdot y + e^{y\ln x}\right) = \frac{e^{y\ln x}}{x}(y\ln x + 1)$, v A je 1
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ln x\cdot e^{y\ln x}\cdot\ln x = \ln^2 x\cdot e^{y\ln x}$, v A je 0
$d^0f(\mathbf{x},A) = f(A) = 1$, $df(\mathbf{x},A) = (x-1)^2$, $d^2f(\mathbf{x},A) = 2(x-1)(y-1)$
$T(f,2,A) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1)^2 + \frac{1}{2!}2(x-1)(y-1) = 1 + (x-1)^2 + (x-1)(y-1)$

$$\boxed{T(f,2,A) = 1 + (x-1)^2 + (x-1)(y-1)}$$

37. $f(x,y) = \sin x\cos y$, $A = (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, $n = 3$
$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x\cos y,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x\sin y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x\cos y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\cos x\sin y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x\cos y$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\cos x\cos y,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \sin x\sin y,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = -\cos x\cos y,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \sin x\sin y$
V bode A sa derivácie rovnajú: $f(A) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{1}{2}$ a zvyšné sú rovné $-\frac{1}{2}$.
$d^0f(\mathbf{x},A) = f(A) = \frac{1}{2}$, $df(\mathbf{x},A) = \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})$,
$d^2f(\mathbf{x},A) = -\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2 - (x-\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})^2$
$d^3f(\mathbf{x},A) = -\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})^3$
$T(f,3,A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2 - (x-\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})^2\right) +$
$+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})^3\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4}) -$
$-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(y-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{12}(y-\frac{\pi}{4})^3$

$$\boxed{\begin{aligned}T(f,3,A) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(x-\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{2}(y-\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{4}(x-\tfrac{\pi}{4})^2 - \tfrac{1}{2}(x-\tfrac{\pi}{4})(y-\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{4}(y-\tfrac{\pi}{4})^2 - \tfrac{1}{12}(x-\tfrac{\pi}{4})^3 +\\ &+\tfrac{1}{4}(x-\tfrac{\pi}{4})^2(y-\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{4}(x-\tfrac{\pi}{4})(y-\tfrac{\pi}{4})^2 + \tfrac{1}{12}(y-\tfrac{\pi}{4})^3\end{aligned}}$$

Extrémy

Lokálne:

Lokálny extrém sa uvažuje len v bodoch, pre ktoré existuje celé otvorené okolie v definičnom intervale. Lokálne minimum(ostré) je bod X, taký, že existuje okolie $O(x)$ také, že pre každé $u \in O(x)$, $u \neq X$ je $f(u) \geq f(X)(f(u) > f(X))$. Podobne sa definuje lokálne maximum(ostré).

38. $f(x,y) = 1 + 6x - y^2 - xy - x^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6 - y - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - x.$

Kandidát na extrém dostaneme riešením sústavy: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, t.j. $\begin{array}{rl} 2x + y & = 6 \\ -x - 2y & = 0 \end{array}$ a $\begin{array}{c} x = 4 \\ y = -2 \end{array}$

Charakter extrému určíme výpočtom druhých parciálnych derivácii.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Rohové determinanty sú -2 a 3, t.j. majú striedajúce znamienka začínajúce záporným - záporne definitná forma, t.j. lokálne maximum.

$$\boxed{(4,-2)_{max}}$$

39. $f(z,t) = 5 + 6z - 4z^2 - 3t^2$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 6 - 8z, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -6t$. Kandidát na extrém je bod $(\frac{4}{3}, 0)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -6, \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, striedavé znamienka rohových determinantov začínajúce zápornou hodnotu - lokálne maximum.

$$\boxed{(\tfrac{4}{3}, 0)_{max}}$$

40. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 215$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 18y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 18x$. T.j. $x^2 = 6y = \frac{y^4}{36}$.

Dostávame 2 kandidátov na extrém $y = 0, x = 0$ a $y = 6, x = 6$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -18, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

bod $(0,0)$: $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{pmatrix}$, indefintná forma - sedlový bod

bod $(6,6)$: $\begin{pmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 36 \end{pmatrix}$, kladné rohové determinanty - kladne definitná forma - lokálne minimum

$$\boxed{(0,0)_{sedlo}, (6,6)_{min}}$$

41. $f(x,y) = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{a-y}\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x+y-a)}} \cdot (-(x+y-a) + a - x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a-y}}{\sqrt{(a-x)(x+y-a)}} \cdot (2a - 2x - y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{a-x}\frac{1}{\sqrt{(a-y)(x+y-a)}} \cdot (-(x+y-a) + a - y) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{(a-y)(x+y-a)}} \cdot (2a - x - 2y)$

Kandidáti na extrém: buď derivácie rovné 0, alebo naraz nie definované:

Ak sa $x = a$, tak keďže ani druhá parc. derivácia nemá byť definovaná, tak dostávame, že buď $y = a$ alebo $y = 0$.

Podobne, ak $y = a$, tak buď $x = a$, alebo $x = 0$.

Ďalej pre hodnoty $x + y = a$, nie sú obe derivácie definované.

Posledná možnosť: obe derivácie definované a rovné 0 nám dáva sústavu: $x + 2y = 2a$, $2x + y = 2a$, t.j. $x = y = \frac{2}{3}a$.

Body $(a,0)$, $(0,a)$, (a,a), $(t, a-t)$, $t \in (0,a)$ ležia na hranici definičného oboru, t.j. neexistuje otvorené okolie týchto bodov, ktoré celé padne do $D(f)$. Teda nepripadajú do úvahy, ako body lokálnych extrémov.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a-y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2a-2x-y}{\sqrt{(a-x)(x+y-a)}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a-y}\frac{-2\sqrt{(a-x)(x+y-a)} - (2a-2x-y)\frac{1}{2}\frac{2a-2x-y}{\sqrt{(a-x)(x+y-a)}}}{(a-x)(x+y-a)} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a-y}\frac{-2(a-x)(x+y-a) - \frac{1}{2}(2a-2x-y)^2}{((a-x)(x+y-a))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{a-y}\frac{2(ax+ay-a^2-x^2-xy+ax) + \frac{1}{2}(4a^2-8ax+4x^2-4ay+4xy+y^2)}{((a-x)(x+y-a))^{\frac{3}{2}}}$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{a-y}\frac{y^2}{((a-x)(x+y-a))^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a-x}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{a-y}(2a-2x-y)}{\sqrt{x+y-a}}\right) =$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a-x}}\frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a-y}}(2a-2x-y)-\sqrt{a-y}\right)\sqrt{x+y-a}-\sqrt{a-y}(2a-2x-y)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+y-a}}}{x+y-a} =$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a-x}}\frac{-\frac{\sqrt{x+y-a}}{2\sqrt{a-y}}(2a-2x-y-(a-y))-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a-y}}{\sqrt{x+y-a}}(2a-2x-y)}{x+y-a} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{a-x}}\frac{\frac{(x+y-a)(a-2x)+(a-y)(2a-2x-y)}{\sqrt{a-y}\sqrt{x+y-a}}}{x+y-a} =$

$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{a-x}\sqrt{a-y}\sqrt{x+y-a}(x+y-a)}(ax-2x^2+ay-2xy-a^2+2ax+2a^2-2ax-ay-2ay+2xy+y^2) =$

$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{a-x}\sqrt{a-y}\sqrt{x+y-a}(x+y-a)}(y^2-x^2+a(x-2y+a))$

Zo symetrie: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\sqrt{a-x}\frac{x^2}{((a-y)(x+y-a))^{\frac{3}{2}}}$

Bod $(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}a}\frac{\frac{4}{9}a^2}{(\frac{1}{3}a\frac{2}{3}a)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2a}}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}a}\sqrt{\frac{1}{3}a}\sqrt{\frac{2}{3}a}\frac{2}{3}a}(\frac{4}{9}a-\frac{4}{9}a+a(\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}a+a)) = -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{2a}}$. Rohové determinanty $(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2a}}, \frac{7}{64}\frac{3}{2a})$ majú striedavé znamienka začínajúce mínusom, preto ide o bod lokálneho maxima.

$(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a)_{max}$

42. $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y+z} - \frac{y}{(x+z)^2} - \frac{z}{(x+y)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(y+z)^2} + \frac{1}{x+z} - \frac{z}{(x+y)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x}{(y+z)^2} - \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{1}{x+y}$

Kandidáti na extrém:

Porovnaním výrazov $\frac{z}{(x+y)^2}$ v $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$, dostávame:

$\frac{1}{y+z} - \frac{y}{(x+z)^2} = -\frac{x}{(y+z)^2} + \frac{1}{x+z}$. Keďže menovatele zlomkov sú nenulové, tak môžeme vynásobiť rovnosť výrazom: $(x+z)^2(y+z)^2$. Dostávame:

$(x+z)^2(y+z) - y(y+z)^2 = -x(x+z)^2 + (x+z)(y+z)^2$, t.j.

$(x+z)(y+z)[(x+z)-(y+z)] = y(y+z)^2 - x(x+z)^2$,

$(x+z)(y+z)(x-y) = y(y^2+2yz+z^2) - x(x^2+2xz+z^2)$

$(x+z)(y+z)(x-y) + x^3 - y^3 + 2z(x^2-y^2) + z^2(x-y)$

$(x-y)[(x+z)(y+z) + x^2 + xy + y^2 + 2z(x+y) + z^2] = 0$

$0 = (x-y)[xy + xz + yz + z^2 + x^2 + xy + y^2 + 2zx + 2zy] = (x-y)[(x^2 + 2xy + y^2 + 3xz + 3yz + 2z^2]$

$0 = (x-y)[(x+y+z)^2 + xz + yz + z^2] = (x-y)[(x+y+z)^2 + z(x+y+z)] = (x-y)(x+y+z)(x+y+2z)$

Podobnou úvahou pre výrazy $\frac{y}{(x+z)^2}$ a $\frac{x}{(y+z)^2}$, resp. využitím symetrie výrazov(cyklická zámena označenia) dostávame, ďalšie podmienky:

$(y-z)(x+y+z)(2x+y+z) = 0$ a $(z-x)(x+y+z)(x+2y+z) = 0$.

$x + y + z = 0$

Dosadením do vyjadrení $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ máme:

$\frac{1}{-x} - \frac{y}{(-y)^2} - \frac{z}{(-z)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$. Dosadením $-y-z$ za x platí:

$-\frac{1}{-y-z} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{y+z} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{yz - z(y+z) - y(y+z)}{(y+z)yz} = \frac{-z^2 - zy - y^2}{(y+z)yz}$, čitateľ je ale 0 len vtedy, keď obe y aj z sú 0, čo nie je možné.(mimo def. obor)

$x + y + 2z = 0$

Dosadením do zvyšných dvoch podmienok máme:

$(y-z)(-z)(x-z) = 0$ a $(z-x)(-z)(y-z) = 0$. Potom, buď $z = 0$ a $x = -y$(nie je možné - def. obor), alebo $y = z$ a $x = -3z$, alebo $x = z$ a $y = -3z$. Z druhej podmienky dostávame body $(-3t, t, t)$ a z druhej $(t, -3t, t)$, $t \neq 0$.

Podobne uvážením podmienok $2x+y+z = 0$ a $(x+2y+z) = 0$, dostávame body ešte v tvare: $(t, t, -3t)$.

$x = y$

Dosadením máme: $(x-z)(2x+z)(3x+z)=0$. Preto, buď $x=z$, čo je $x=y=z\neq 0$, alebo $x=y$, $z=-2x$, alebo podľa predošlého prípadu $z=-3x$. Čiže ďalšie možné body extrému sú body (t,t,t), $t\neq 0$ a $(t,t,-2t)$, $(t,-2t,t)$ a $(-2t,t,t)$, $t\neq 0$. (zo symetrie).

Charakter extrémov:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y}{(x+z)^3}+\frac{2z}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2x}{(y+z)^3}+\frac{2z}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2x}{(y+z)^3}+\frac{2y}{(x+z)^3}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(y+z)^2}-\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{2z}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{2y}{(x+z)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{2x}{(y+z)^3}-\frac{1}{(x+z)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$

(t,t,t)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{4}{t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0$, t.j. $\begin{pmatrix}\frac{4}{t^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{4}{t^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{t^2}\end{pmatrix}$, rohové determinanty sú kladné, t.j. ide o kladne definitnú formu a lokálne minimum(hodnota $=\frac{3}{2}$).

$(-2t,t,t)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{4}{t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\frac{5}{2t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-\frac{13}{4t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{5}{2t^2}$, t.j. $\begin{pmatrix}-\frac{4}{t^2} & -\frac{13}{4t^2} & -\frac{13}{4t^2}\\ -\frac{13}{4t^2} & -\frac{5}{2t^2} & \frac{-5}{2t^2}\\ -\frac{13}{4t^2} & -\frac{5}{2t^2} & \frac{-5}{2t^2}\end{pmatrix}$, 1. aj 2. rohový determinant je záporny, a determinant celej je 0(2. a 3. riadok sa rovnajú), preto ide o sedlǒy bod.

Analogicky sa vyriešia prípady $(t,-2t,t)$ a $(t,t,-2t)$, teda aj tieto sú sedlovými bodmi.

$(t,t,-3t)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\frac{1}{2t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{5}{4t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{3}{4t^2}$, t.j. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{t^2} & -\frac{5}{4t^2} & -\frac{3}{4t^2}\\ -\frac{5}{4t^2} & -\frac{1}{t^2} & -\frac{3}{4t^2}\\ -\frac{3}{4t^2} & -\frac{3}{4t^2} & -\frac{1}{2t^2}\end{pmatrix}$, 1. a 2. rohový determinant je záporný, preto ide o indefinitnú formu, a teda sedlový bod. Analogicky sa vyšetria prípady $(t,-3t,t)$ a $(-3t,t,t)$.

$(t,t,t)_{min},\ t\neq 0$

Viazané extrémy:

Metódy riešenia:

1. Vyjadrenie jednej z premenných z väzbových podmienok a dosadenie funkcie, pre ktorú hľadáme extrémy. Tým sa úloha redukuje na hľadanie lokálneho extrému funkcie s o jedna menším počtom premenných, ako mala pôvodná.

2. tzv. Metóda Lagrangeových multiplikátorov: úloha nájsť viazané extrémy funkcie f, vzhľadom na väzby zadané vyjadreniami: $g_1(x)=0, g_2(x)=0,\ldots,g_m(x)=0$. Skonštruuje sa funkcia $L=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2\ldots+\lambda_n g_n$. Hľadajú sa lokálne extrémy tejto funkcie(výpočet prvých parciálnych derivácií) aj s charakterom kandidátskych bodov(2. parciálne derivácie). Väčšinou sa najprv dostanú hodnoty $x,y,\ldots$ v závislosti od λ_i, ale spätným dosadením do podmienok väzby(g_j) sa získajú konkrétne body, ktoré sú kandidátmi na extrém.

43. $z=xy-x+y-1$, ak $x+y=1$

1. metóda:

$y=1-x$, preto $z=x(1-x)-x+(1-x)-1=-x^2-x$, $z'=-2x-1$, preto $x=-\frac{1}{2}$ a $y=1-x=\frac{3}{2}$
$z''=-2$, preto ide o lokálne maximum.

2. metóda: (v tomto type príkladu nevhodná, uvedená je len pre ilustráciu)

$L=xy-x+y-1+\lambda(x+y-1)$
$\frac{\partial L}{\partial x}=y-1+\lambda$, $y=1-\lambda$
$\frac{\partial L}{\partial y}=x+1+\lambda$, $x=-1-\lambda$

Dosadením x,y do väzbovej podmienky: $0=x+y-1=(-1-\lambda)+(1-\lambda)-1=-2\lambda-1$, t.j. $\lambda=-\frac{1}{2}$ a $(x,y)=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

Charakter extrému: Použitím klasickej metódy t.j. $\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ dostávame, že bod $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ je sedlový bod. My nehľadáme extrém na každom okolí bodu A, ale len na tých bodoch, ktoré ležia na väzbe(priamka). Preto okolia bodu sú v tvare: $(-\frac{1}{2}+\epsilon, \frac{3}{2}-\epsilon)$. Kvadratická forma má tvar $(\, x-A_x \quad y-A_y\,)\cdot\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-A_x \\ y-A_y \end{pmatrix} = A(x-A_x)^2+2B(x-A_x)(y-A_y)+C(y-A_y)^2$, t.j. pre tento príklad $2(x+\frac{1}{2})(y-\frac{3}{2})$. Dosadenie: $2(-\frac{1}{2}+\epsilon+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-\epsilon-\frac{3}{2}) = -2\epsilon^2$. Pre nenulové ϵ je to vždy záporné, preto ide o záporne definitnú formu(na oblasti) a teda o maximum.

$$\boxed{(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})_{max}}$$

44. $z = x+y$, ak $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}, a>0$

1. metóda:

$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-a^2}{a^2x^2}$, t.j. $y^2 = \frac{a^2x^2}{x^2-a^2}$, $|y| = a\frac{|x|}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$\boxed{y>0,\ x>0:}$

$y = a\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$z = x+y = x+\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $z' = 1+\frac{a\sqrt{x^2-a^2}-ax\cdot\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2} = 1+\frac{a(x^2-a^2)-ax^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}-a^3}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$,

t.j. $a^3 = (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$, $a^2 = x^2-a^2$ a $x = \sqrt{2}a$, podmienka $(x>0)$, $y = \frac{a\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2-a^2}} = \sqrt{2}a$

$z'' = -a^3\left((x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' = -a^3(-\frac{3}{2})(x^2-a^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = 3a^3x(x^2-a^2)^{-\frac{5}{2}}$. Znamienko derivácie závisí iba od hodnoty x. Pre tento prípad je to kladné, čiže ide o lokálne minimum.

$\boxed{y>0,\ x<0:}$

$y = -a\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$,

$z = x-a\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $z' = 1-\frac{-a^3}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = 1+\frac{a^3}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$, t.j. neexistuje taký bod, aby sa $z'=0$.

$\boxed{y<0,\ x>0:}$

$y = -a\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $x>0$, čo rovnako ako v predošlom prípade nedáva žiadnych kandidátov na extrém.

$\boxed{y<0,\ x<0:}$

$y = a\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$. Použije sa postup z prvého prípadu, len pri zisťovaní konkrétnej hodnoty sa použije podmienka $x<0$. T.j. $x = -\sqrt{2}a$ a $y = -\sqrt{2}a$. Druhá derivácia má ten istý predpis ako v prvom prípade. Tentokrát je záporna, t.j. lokálne maximum.

2. metóda:

$L = x+y+\lambda(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2})$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 1-\frac{2\lambda}{x^3}$, $\quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1-\frac{2\lambda}{y^3}$, $\quad$ t.j. $x = y = \sqrt[3]{2\lambda}$

Dosadením x, y do väzby dostávame: $\frac{2}{x^2} = \frac{1}{a^2}$, t.j. $x^2 = 2a^2$, t.j. $|x| = \sqrt{2}a$, $x = \pm\sqrt{2}a$. Príslušné $\lambda = \frac{x^3}{2}$ je pre kladné x rovné $\sqrt{2}a^3$, a pre záporné $-\sqrt{2}a^3$.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{6\lambda}{x^4}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{6\lambda}{y^4}$

pre $\lambda>0$: $\begin{pmatrix} >0 & 0 \\ 0 & >0 \end{pmatrix}$, t.j. pozitívne definitná forma a lokálne minimum

pre $\lambda<0$: $\begin{pmatrix} <0 & 0 \\ 0 & <0 \end{pmatrix}$, t.j. negatívne definitná forma a lokálne maximum

$$\boxed{(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a)_{max}, (\sqrt{2}a, \sqrt{2}a)_{min}}$$

45. $z = x^2+y^2$, ak $\frac{x}{p}+\frac{y}{q} = 1$

1. metóda: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q} = 1\ (\cdot pq)$, $qx+py = pq$, $y = \frac{pq-qx}{p} = q-\frac{q}{p}x = q(1-\frac{1}{p}x)$

$z = x^2+y^2 = x^2+q^2\left(1-\frac{x}{p}\right)^2$, $z' = 2x+2q^2(1-\frac{x}{p})\frac{-1}{p} = -\frac{2q^2}{p}+2x(1+\frac{q^2}{p^2})$,

$x = \frac{2q^2}{p}\cdot\frac{1}{2(1+\frac{q^2}{p^2})} = \frac{2q^2}{p}\cdot\frac{p^2}{2(p^2+q^2)} = \frac{pq^2}{p^2+q^2}$, $y = q(1-\frac{x}{p}) = q(1-\frac{q^2}{p^2+q^2}) = q\frac{p^2}{p^2+q^2} = \frac{p^2q}{p^2+q^2}$

$z'' = 2(1 + \frac{q^2}{p^2}) > 0$, lokálne minimum

2. metóda:

$L = x^2 + y^2 + \lambda(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \frac{\lambda}{p}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \frac{\lambda}{q}$, t.j. $x = -\frac{\lambda}{2p}, y = -\frac{\lambda}{2q}$, $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = -\frac{\lambda}{2p^2} - \frac{\lambda}{2q^2} - 1 = 0$ $(.4p^2q^2)$, $-\lambda(2q^2 + 2p^2) - 4p^2q^2 = 0$, t.j. $\lambda = -\frac{2p^2q^2}{p^2+q^2}$ a $x = \frac{pq^2}{p^2+q^2}, y = \frac{p^2q}{p^2+q^2}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, t.j. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, kladne definitná forma, lokálne minimum

$$\boxed{\left(\frac{pq^2}{p^2+q^2}, \frac{p^2q}{p^2+q^2}\right) \text{ min}}$$

46. $u = \cos x \cos y \cos z$, ak $x + y + z = -\pi$

$z = -\pi - x - y$, preto $u = \cos x \cos y \cos(-\pi - x - y) = \cos x \cos y[\cos(-\pi)\cos(x+y) + \sin(-\pi)\sin(x+y)] = -\cos x \cos y \cos(x + y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\cos y[-\sin x \cdot \cos(x + y) - \cos x \sin(x + y)] = \cos y \cdot \sin((x + y) + x) = \cos y \sin(2x + y)$

Zo symetrie, $\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sin(x + 2y)$.

Kandidáti na extrém: $x, y \in (-\pi, \pi\rangle$, preto $x + 2y, 2x + y \in (-3\pi, 3\pi\rangle$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, ak $\cos y = 0$, alebo $\sin(2x + y) = 0$, t.j. vzhľadom na obmedzenie hodnôt dostávame:

$y \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, alebo $2x + y \in \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$.

Z $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, zase dostávame:

$x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, alebo $x + 2y \in \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos y \cdot \cos(2x + y) \cdot 2 = 2\cos(2x + y)\cos y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\sin y \cdot \sin(2x + y) + \cos y \cos(2x + y) = \cos((2x + y) + y) = \cos(2x + 2y)$

Symetria, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\cos(x + 2y)\cos x$

Ak $y = -\frac{\pi}{2}$, potom $x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, alebo $x - \pi (= 2y) \in \{-2\pi, \ldots, 3\pi\}$, t.j. $x \in \{-\pi, \ldots, 4\pi\}$, obmedzením sa na interval $(-\pi, \pi\rangle$, dostávame 4 kandidátov pre $x \in \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Podobnou úvahou dostávame pre $y = \frac{\pi}{2}$, $x \in \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

Zo symetrie výrazu dostávame, že predošlé platí aj pre body s vymenenými súradnicami.

Takže kandidáti tohto druhu sú:

$(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sedlový bod

$(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sedlový bod

$(0, -\frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\pi, -\frac{\pi}{2})$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, sedlový bod

Ďalším typom kandidátov sú tie body, pre ktoré $x + 2y, 2x + y \in \{-2\pi \ldots, 3\pi\}$. Dopĺňaná matica je symetrická, t.j. stačí doplniť iba prvky nad diagonálou. Body, ktoré sú mimo $(-\pi, \pi\rangle \times (-\pi, \pi\rangle$, nie sú zobrazené.

$x + 2y/2x + y$	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π
-2π	$(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$					
$-\pi$		$(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$	$(\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$			
0			$(0, 0)$	$(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$		
π				$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$	$(\pi, 0)$	
2π					$(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$	
3π						(π, π)

$(\pi, \pi), (0, \pi), (\pi, 0), (0, 0)$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, lokálne minimum - hodnota -1.

$(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$, $(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$, $(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$, $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$:

$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, lokálne maximum - hodnota $\frac{1}{8}$

Samozrejme, že ten istý charakter majú body, ktorých súradnice sa líšia od horeuvedených o nejaké násobky 2π.

Maximá:
$(-\frac{2\pi}{3}+k\pi, -\frac{2\pi}{3}+l\pi, -(k+l-\frac{1}{3})\pi)$, $k,l \in Z$
$(\frac{2\pi}{3}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+l\pi, -(k+l+\frac{7}{3})\pi)$, $k,l \in Z$
$(\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{\pi}{3}+2l\pi, -(2k+2l+\frac{4}{3})\pi)$, $k,l \in Z$
$(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2l\pi, -(2k+2l+\frac{2}{3})\pi)$, $k,l \in Z$
$(-\frac{\pi}{3}+2l\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi, -(2k+2l+\frac{2}{3})\pi)$, $k,l \in Z$
$(\frac{\pi}{3}+2l\pi, -\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -(2k+2l+\frac{4}{3})\pi)$, $k,l \in Z$
Minimá: $(k\pi, l\pi, -(1+k+l)\pi)$, $k,l \in Z$

> Maximá: $(-\frac{2\pi}{3}+k\pi, -\frac{2\pi}{3}+l\pi, -(k+l-\frac{1}{3})\pi)$, $(\frac{2\pi}{3}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+l\pi, -(k+l+\frac{7}{3})\pi)$,
> $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{\pi}{3}+2l\pi, -(2k+2l+\frac{4}{3})\pi)$, $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2l\pi, -(2k+2l+\frac{2}{3})\pi)$,
> $(-\frac{\pi}{3}+2l\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi, -(2k+2l+\frac{2}{3})\pi)$, $(\frac{\pi}{3}+2l\pi, -\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -(2k+2l+\frac{4}{3})\pi)$, $k,l \in Z$
> Minimá: $(k\pi, l\pi, -(1+k+l)\pi)$, $k,l \in Z$

47. $u = xyz$, ak $x^2+y^2+z^2=3$
1. metóda: $z = \pm\sqrt{3-x^2-y^2}$
$u = \pm xy\sqrt{3-x^2-y^2}$
$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm y(\sqrt{3-x^2-y^2} + x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}) = \pm y(\sqrt{3-x^2-y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}}) = \pm y(\frac{3-2x^2-y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}})$
Zo symetrie: $\frac{\partial u}{\partial y} = \pm x(\frac{3-x^2-2y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}})$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pm y\frac{-4x\sqrt{3-x^2-y^2}-(3-2x^2-y^2)\frac{-x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}}{3-x^2-y^2} = \pm y\frac{-4x(3-x^2-y^2)+x(3-2x^2-y^2)}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)} =$
$= \pm xy\frac{-12+4x^2+4y^2+3-2x^2-y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)} = \pm xy\frac{-9+2x^2+3y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)}$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \pm\frac{3-2x^2-y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}} \pm y\frac{-2y\sqrt{3-x^2-y^2}-(3-2x^2-y^2)\frac{-y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}}{3-x^2-y^2} = \pm\frac{3-2x^2-y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}} \pm y\frac{y(-2(3-x^2-y^2)+3-2x^2-y^2)}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)}$
$= \pm\frac{3-2x^2-y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}} \pm y^2\frac{-3+y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)} = \pm\frac{(3-2x^2-y^2)(3-x^2-y^2)-3y^2+y^4}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)} =$
$= \pm\frac{[(3-y^2)-x^2][(3-y^2)-2x^2]-y^2(3-y^2)}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)} = \pm\frac{(3-y^2)^2-3x^2(3-y^2)-y^2(3-y^2)}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)} = \pm\frac{(3-y^2)(3-3x^2-2y^2)}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)}$
Zo symetrie: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \pm xy\frac{-9+3x^2+2y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}(3-x^2-y^2)}$
Kandidáti na extrém: nulové parciálne derivácie, alebo neexistujúce.

Ak $x^2+y^2=3$, tak $z=0$: tieto sú však sedlové body, pretože pri malej zmene hodnôt x,y existujú 2 hodnoty z v takomto okolí, ktoré majú opačné znamienka.(Teda aj súčin má opačné znamienka a teda na ľubovoľnom okolí existujú hodnoty aj väčšie aj menšie.

Podobne, ak $x=0$, $y=0$, tak dostávame sedlový bod.(zdôvodnenie viď. v 2. metóde)

Posledná možnosť $2x^2+y^2=3=x^2+2y^2$, nám dáva dvojice (x,y), také že $|x|=|y|=1$

$(1,1),(-1,-1)$: $\begin{pmatrix} \mp 4 & \mp 4 \\ \mp 4 & \mp 4 \end{pmatrix}$, pozitívne semidefinitná forma(pre +) a negatívne definitná pre −. Takže Body $(1,1,-1),(-1,-1,-1)$ sú minimá a $(1,1,1),(-1,-1,1)$ maximá

$(1,-1),(-1,1)$: $\begin{pmatrix} \pm 4 & \mp 4 \\ \mp 4 & \pm 4 \end{pmatrix}$, pozitívne semidefinitná forma pre + a negatívne semidefinitná pre −. Body $(1,-1,1)$ a $(-1,1,1)$ sú minimá a $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ maximá.

2. metóda: $L = xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-3)$
$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + 2x\lambda$
$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + 2y\lambda$
$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + 2z\lambda$
Ak $x=0$, tak buď $y=z=0$, alebo $\lambda=0$. Podobne pre $y=0$ a $z=0$.

Ak $\lambda=0$, tak opäť aspoň jedna z hodnôt y resp. z sa musí rovnať 0. Použitím podmienky z väzby dostávame kandidátov: $(0,0,\pm\sqrt{3})$, $(0,\pm\sqrt{3},0)$ a $(\pm\sqrt{3},0,0)$. Tieto body sú však sedlové. Stačí (pre $(0,0,\pm\sqrt{3})$) raz zvoliť $(\epsilon,\epsilon,\pm\sqrt{3-2\epsilon^2})$ a druhýkrát $(\epsilon,-\epsilon,\pm\sqrt{3-2\epsilon^2})$. Tieto hodnoty majú opačné znamienka, teda pre ľubovoľné okolie $(0,0,\pm\sqrt{3})$ existujú hodnoty menšie aj väčšie, čo je podmienka sedlového bodu. Ostatné 4 body sa dokážu úplne rovnako, len sa cyklicky zamení označenie.

Nech teraz, žiadne z x, y, z nie je rovné 0. Potom musí platiť $-2\lambda = \frac{xy}{z} = \frac{xz}{y} = \frac{yz}{x}$. Týmto dostávame kandidátov v tvare (x, y, z), kde $|x| = |y| = |z| = 1$.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2\lambda$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = z$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = y$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = x$.

Pre body $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$ je $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Pre body $(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, -1)$ je $\lambda = \frac{1}{2}$.

Matica druhého diferenciálu je $\begin{pmatrix} 2\lambda & z & y \\ z & 2\lambda & x \\ y & x & 2\lambda \end{pmatrix}$. Táto matica dáva indefinitnú formu. Je potrebné sa obmedziť len na body z hranice. Toto je však veľmi pracné.

$(1, 1, 1)$: Body z okolia sú v tvare:

$(1 + \epsilon, 1 + \delta, \sqrt{3 - (1 + \epsilon)^2 - (1 - \delta)^2}) = (1 + \epsilon, 1 + \delta, \sqrt{1 - 2(\epsilon + \delta) - (\epsilon^2 + \delta^2)})$, t.j.

$f = (1 + \delta)(1 + \epsilon)\sqrt{1 - 2(\delta + \epsilon) - (\epsilon^2 + \delta^2)}$.

Platí: $\sqrt{1 - 2(\epsilon + \delta) - (\epsilon^2 + \delta^2)} \leq (1 - \epsilon)(1 - \delta)$.

$\sqrt{1 - 2(\epsilon + \delta) - (\delta^2 + \epsilon^2)}$? $(1 - \epsilon)(1 - \delta)$ $/^2$(obe strany sú kladné, preto ekviv. úprava $\epsilon, \delta \leq 1$))

$1 - 2\epsilon - 2\delta - \delta^2 - \epsilon^2$? $(1 - 2\epsilon + \epsilon^2)(1 - 2\delta + \delta^2) = 1 - 2(\epsilon + \delta) + \epsilon^2 + \delta^2 + 4\delta\epsilon - 2\delta\epsilon^2 - 2\delta^2\epsilon + \delta^2\epsilon^2$

0 ? $2\delta^2 + 2\epsilon^2 + \delta\epsilon(4 - 2\delta - 2\epsilon + \delta\epsilon) = 2\delta^2 + 2\epsilon^2 + \delta\epsilon(2 - \delta)(2 - \epsilon)$

Ak jedno z ϵ alebo δ je rovné 0, tak porovnávame 0 s výrazom $2\delta^2$ resp. $2\epsilon^2$, t.j. ? $=\leq$.

Nech teraz obe ϵ, δ sú nenulové. Možno písať $\epsilon = k\delta$, pre nejaké $k \in R - 0$. Dosadením do pôvodnej nerovnosti dostávame:

$2\delta^2 + 2k^2\delta^2 + k\delta^2(2 - \delta)(2 - k\delta) = 2\delta^2 + 2k^2\delta^2 + 4k\delta^2 - 2k(k + 1)\delta^2 + k^2\delta^4 = \delta^2(1 + 2k + k^2) +$

$+\delta^2[(1 + 2k + k^2) - 2k(k + 1)\delta + k^2\delta^2] = \delta^2(1 + k)^2 + \delta^2[(1 + k)^2 - 2(k + 1) \cdot k\delta + k^2\delta^2] =$

$= \delta^2(k + 1)^2 + \delta^2(k\delta - (k + 1))^2 \geq 0$

Na základe tejto nerovnosti možno funkciu f na rýdzom okolí bodu $(1, 1, 1)$ ohraničiť:

$f \leq (1 - \epsilon)(1 - \delta)(1 + \epsilon)(1 + \delta) = (1 - \epsilon^2)(1 - \delta^2) \leq 1$

Preto je bod $(1, 1, 1)$ je bodom maxima.

$(-1, -1, 1)$

Funkcia $f = (-1 + \epsilon)(-1 + \delta)(\sqrt{1 + 2(\epsilon + \delta) - \epsilon^2 - \delta^2}) = (1 - \epsilon)(1 - \delta)\sqrt{1 + 2(\epsilon + \delta) - \epsilon^2 - \delta^2})$

Nahradením $\epsilon = -\epsilon'$, $\delta = -\delta'$ sa dostávame k tomu, že $f = (1 + \epsilon')(1 + \delta')\sqrt{1 - 2(\epsilon' + \delta') - \epsilon'^2 - \delta'^2} \leq (1 + \epsilon')(1 + \delta')(1 - \epsilon')(1 - \delta') \leq (1 - \epsilon'^2)(1 - \delta'^2) \leq 1$. T.j. opäť je bod $(-1, -1, 1)$ maximom.

Zámenou premenných dostávame, že aj body $(-1, 1, -1)$ a $(1, -1, -1)$ sú bodmi maxima. (Pod zámenou sa myslí nasledovné: namiesto $(1 + \epsilon, 1 + \delta, \surd)$ sa bude uvažovať $(1 + \epsilon, \surd, 1 + \delta)$, resp. $(\surd, 1 + \epsilon, 1 + \delta)$.)

$(-1, -1, -1)$: Body okolí sú v tvare $(-1 + \epsilon, -1 + \delta, -\sqrt{(1 + 2(\epsilon + \delta) - \delta^2 - \epsilon^2)}$

Funkcia $f = (-1 + \epsilon)(-1 + \delta)(-\sqrt{1 + 2(\delta + \epsilon) - \delta^2 - \epsilon^2}) = -(1 - \epsilon)(1 - \delta)(\sqrt{1 + 2(\delta + \epsilon) - \delta^2 - \epsilon^2})$.

Dostávame, až na znamienko rovnakú funkciu ako pre bod $(-1, -1, 1)$. Preto aj v odvodzovaní nerovností sa výrazy násobia -1, čo má za následok zmenu nerovností na opačné. Preto, platí:

$f \geq -(1 - \epsilon^2)(1 - \delta^2) \geq -1$, čím dostávame, že $(-1, -1, -1)$ je minimom.

$(1, 1, -1)$: Body okolí sú v tvare $(1 + \epsilon, 1 + \delta, -\sqrt{1 - 2(\delta + \epsilon) - \delta^2 - \epsilon^2})$ a funkcia $f = (1 + \epsilon)(1 + \delta)(-\sqrt{1 - 2(\delta + \epsilon) - \delta^2 - \epsilon^2}) = -(1 + \epsilon)(1 + \delta)\sqrt{1 - 2(\delta + \epsilon) - \delta^2 - \epsilon^2}$.

Opäť, až na znamienko sa líši od prípadu $(1, 1, 1)$, preto sa nerovnosti zmenia na opačné a namiesto maxima, dostávame minimum.

Body $(1, -1, 1)$ a $(-1, 1, 1)$ sa vyriešia zámenou premenných, takou istou ako pre $(1, -1, -1)$ a $(-1, 1, -1)$ a sú to body minima.

Maximá: $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, hodnota 1
Minimá: $(-1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$, hodnota -1

48. $u = x^2 + y^2 + z^2$, ak $x + y - 3z + 7 = 0, x - y + z - 3 = 0$

1.metóda:

Väzbové podmienky tvoria sústavu. Sčítaním rovníc dostávame, že $2x - 2z + 4 = 0$, t.j. $x = z - 2$.

Dosadením do prvej z rovníc dostávame: $z - 2 + y - 3z + 7 = 0 = y - 2z + 5$, čiže $y = 2z - 5$.

Máme vyjarené x, y, z. Po dosadení do vyjadrenia u máme:

$u = x^2 + y^2 + z^2 = (z-2)^2 + (2z-5)^2 + z^2 = 6z^2 - 24z + 29$,
$u' = 12z - 24$, čiže kandidát na extrém: $z = 2$. $u'' = 12 > 0$, t.j. lokálne minimum.
$x = z - 2 = 0$, $y = 2z - 5 = -1$. Teda bod $(0, -1, 2)$.

2.metóda:

$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y - 3z + 7) + \lambda_2(x - y + z - 3)$
$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1 + \lambda_2$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda_1 - \lambda_2$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - 3\lambda_1 + \lambda_2$.
Teda $x = -\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2$, $y = -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2$, $z = \frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2$.
Dosadením do väzbových podmienok dostávame:
$-7 = x + y - 3z = -\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{9}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 = -\frac{11}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2$
$3 = x - y + z = -\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2$, t.j.
$-4\lambda_1 = -4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ a príslušný kandidát: $(0, -1, 2)$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2$, ostatné parciálne derivácie sú 0. Dostávame maticu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Rohové determinanty $|2| = 2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$, preto lokálne minimum.

$$\boxed{(0, -1, 2)_{min}}$$

Globálne(absolútne):

Hľadanie globálnych extrémov prebieha v dvoch krokoch. Najprv sa nájdu všetky lokálne extrémy funkcie, ktoré sú vo vnútri danej oblasti. Zaznamená sa bod, charakter extrému a hodnota funkcie v danom bode.

Ďalšie body, ktoré môžu byť extrémami sú body z hranice oblasti. Takže v ďalšom sa rieši úloha o viazaných extrémoch, pričom väzba bude hranica oblasti. Opäť sa zaznamená bod, charakter extrému a hodnota funkcie.

Nakoniec sa vyberie bod s maximálnou hodnotou a bod s minimálnou hodnotou.

49. $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ na oblasti $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq -x + 3$
Oblasť je trojuholník s vrcholmi $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$.
1. lokálne extrémy:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4x$
Kandidát na extrém: $x = 1, y = 1$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$, t.j. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, sedlový bod (striedavé znamienka začínajúce kladnou hodnotou).
T.j. vo vnútri oblasti nie sú žiadne extrémy.
2. extrémy na hranici:
hrana $(0, 0)$ — $(3, 0)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, t.j. $x = 3t$, $y = 0$
$f = 9t^2 - 18t - 1$, $f' = 18t - 18$, teda $t = 1$, hranica hrany
hrana $(0, 0)$ — $(0, 3)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, t.j. $x = 0$, $y = 3t$
$f = -18t^2$, $f' = -36t$, $t = 0$, hranica hrany
hrana $(3, 0)$ — $(0, 3)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $x = 3 - 3t$, $y = 3t$

$f = (3 - 3t)^2 - 2 \cdot (3t)^2 + 4(3 - 3t) \cdot 3t - 6(3 - 3t) - 1 = 9(1 - t)^2 - 18t^2 + 36(1 - t) - 18(1 - t) - 1 = 9 - 18t + 9t^2 - 18t^2 + 18 - 18t - 1 = -9t^2 - 36t + 26$, $f' = -18t - 36$, $t = -2$, t.j. mimo hrany
hranice hraníc, t.j. vrcholy trojuholníka:

$(0, 0)$: Body okolí bodu sú v tvare (δ, ϵ), $\delta, \epsilon \geq 0$, $f = O(\delta^2) + O(\epsilon^2) + O(\delta\epsilon) - 6\delta - 1$. Existuje rýdze okolie, na ktorom sú hodnoty menšie ako $f(0, 0) = -1$, preto $(0, 0)$ je bod maxima s hodnotou -1.

$(3, 0)$: Body okolí sú v tvare $(3 - \delta, \epsilon)$, $0 \leq \epsilon \leq \delta$, $f = (3 - \delta^2) - 2\epsilon^2 + 4(3 - \delta)\epsilon - 6(3 - \delta) - 1 = 9 - 6\delta + O(\delta^2) + O(\epsilon^2) + 12\epsilon + O(\delta\epsilon) - 18 + 6\delta - 1 = -10 + 12\epsilon + O(\delta^2) + O(\delta\epsilon) + O(\epsilon^2)$. Existuje okolie, ktorom sú hodnoty väčšie rovné ako $f(3, 0) = -10$, t.j. minimum s hodnotou -10.

$(0,3)$: Body v okoliach sú v tvare $(\delta, 3-\epsilon)$, $0 \le \delta \le \epsilon$, $f = \delta^2 - 2(3-\epsilon)^2 + 4\delta(3-\epsilon) - 6(\delta) - 1 = O(\delta^2) + O(\epsilon^2) + 6\epsilon + 12\delta + O(\delta\epsilon) - 6\delta - 1 - 18 = -19 + 6\delta + 6\epsilon + O(\delta^2) + O(\delta\epsilon) + O(\epsilon^2)$. Existuje okolie, na ktorom sú hodnoty väčšie rovné, ako $f(0,3) = -19$, t.j. ide o bod minima s hodnotou -19.

Minimá: $(3,0) : f = -10$, $(0,3) : f = -19$. Menšia hodnota je v $(0,3)$.

Maximá: $(0,0) : f = -1$.

$$\boxed{(0,3)_{min}, f = -19,\ (0,0)_{max}, f = -1}$$

50. $f(x,y) = xy^2(4-x-y)$ na oblasti ohraničenej krivkami $x = 0, y = 0, x + y = 6$

Oblasť je trojuholník s vrcholmi $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,6)$.

1. Lokálne extrémy:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(4 - x - y + x(-1)) = y^2(4 - 2x - y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x(2y(4-x-y) + y^2(-1)) = x(8y - 2xy - 2y^2 - y^2) = xy(8 - 2x - 3y)$

Podmienky sú: $(y = 0 \vee 4 = 2x + y) \wedge (x = 0 \vee y = 0 \vee 2x + 3y = 8)$. $y = 0$ (hranica), $x = 0$ (hranica), $(4 = 2x + y,\ 8 = 2x + 3y)$, $y = 2$, $x = 1$ (vnútro)

Charakter extrému:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y(4-2x-y) + y^2(-1) = y(8-4x-3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(8-2x-3y+y(-3)) = 2x(4-x-3y)$

Pre $(1,2)$: $\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$. Rohové determinanty majú striedavé znamienka začínajúce mínusom, t.j. záporne definitná forma a bod $(1,2)$ je lokálne maximum, $f = 4$.

2. Extrémy na hranici:

hrana $(0,0)$ — $(6,0)$: $y = 0$, $x \in \langle 0,6 \rangle$. Hodnoty sú rovné 0. Keď si zoberieme bod tvaru $(a,0)$, kde $a \in (0,6)$. Body okolí takéhoto bodu sú v tvare: $(a+\epsilon, \delta)$, kde $\delta \ge 0$, $-a < \epsilon < 6 - a$. Potom $f = (a+\epsilon)\delta(4 - a - \epsilon - \delta)$. Keď sa $0 < a < 4$, tak existuje okolie, na ktorom sú hodnoty väčšie rovné 0, preto tieto body sú lokálne minimá s hodnotou 0. Pre $4 < a < 6$, zase máme okolia, na ktorých sú hodnoty menšie rovné ako 0, t.j. lokálne maximá s hodnotou 0. Bod $(4,0)$ nie je bod extrému.

hrana $(0,0)$ — $(0,6)$: $x = 0$, $y \in \langle 0,6 \rangle$. Opäť sa hodnoty rovnajú 0. Vnútorné body sú v tvare $(0,a)$, kde $a \in (0,6)$. Body okolí sú $(\delta, a+\epsilon)$, kde $\delta \ge 0$ a $-a < \epsilon < 6 - a$. Potom $f = \delta(a+\epsilon)^2(4 - \delta - a - \epsilon)$. Opäť pre $0 < a < 4$ dostávame minimá s hodnotou 0 a pre $4 < a < 6$ maximá s hodnotou 0. $(0,4)$ nie je bod extrému.

hrana $(6,0)$ — $(0,6)$: $(6-t, t)$, $t \in \langle 0,6 \rangle$.

$f = (6-t)t^2(4 - 6 + t - t) = -2(6-t)t^2$.

$f' = -4t(6-t) - 2t^2(-1) = -24t + 6t^2$, $t = 0$, alebo $t = 4$. ($t = 0$ je hranica hranice)

$f'' = -12 + 6t$, pre $t = 4$ je $f'' > 0$, t.j. minimum $(2,4)$ hodnota $f = -64$.

Hranica hranice, t.j vrcholy trojuholníka:

$(0,0)$: Body okolí (δ, ϵ), $\delta, \epsilon \ge 0$. Funkcia $f = \delta\epsilon^2(4 - \delta - \epsilon)$, čiže existuje okolie, na ktorom sú hodnoty $\ge 0 = f(0,0)$. $(0,0)$ lokálne minimum s hodnotou 0.

$(6,0)$: Body okolí $(6-\delta, \epsilon)$, $\delta, \epsilon \ge 0$. Funkcia $f = (6-\delta)\epsilon^2(4 - 6 + \delta - \epsilon) = (6-\delta)\epsilon^2(-2 + \delta - \epsilon)$. Existuje okolie, ktorom sú hodnoty menšie rovné ako $0 = f(6,0)$, t.j. $(6,0)$ je lokálne maximum s hodnotou 0.

$(0,6)$: Body okolí $(\delta, 6-\epsilon)$, $\delta, \epsilon \ge 0$. Funkcia $f = \delta(6-\epsilon)^2(4-\delta-6+\epsilon) = \delta(6-\epsilon)^2(-2-\delta+\epsilon)$. Existuje okolie, na ktorom sú hodnoty menšie rovné ako $0 = f(0,6)$, preto ide o lokálne maximum s hodnotou 0.

Maximá: $(a,0), (0,a)$, $4 < a \le 6$: $f = 0$, $(1,2)$: $f = 4$. Globálne maximum je $(1,2)$ s hodnotou 4.

Minimá: $(a,0), (0,a)$, $0 \le a < 4$: $f = 0$, $(2,4)$: $f = -64$. Globálne minimum je $(2,4)$ a má hodnotu -64.

$$\boxed{(1,2)_{max}, f(1,2) = 4;\ (2,4)_{max},\ f(2,4) = -64}$$

51. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na obdĺžniku s vrcholmi $A = (0,-1)$, $B = (2,-1)$, $C = (2,2)$, $D = (0,2)$

1. Lokálne extrémy f:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$, t.j. $y = x^2$ a $x = y^2$, čiže $y = y^4$, $y(y^3 - 1) = 0 = y(y-1)(y^2+y+1) = 0$. Kvadratická rovnica má záporný diskriminant, preto vyhovujú len $y = 0$ alebo $y = 1$. Potom $x = y = 0$ alebo $x = y = 1$. Bod $(0,0)$ je na hranici oblasti. Len bod $(1,1)$ je vo vnútri oblasti. Charakter extrému:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$. V bode $(1,1)$ sú hodnoty derivácií: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$. Rohové determinanty sú kladné, preto ide o bod lokálneho minima. $(1,1)_{min}, f = -1$

2. Extrémy na hranici oblasti:

hrana AB: rovnica $\vec{x} = A + \vec{AB}t$, t.j. $\begin{array}{ccccc} x & = & 0 & + & 2t \\ y & = & -1 & + & 0t \end{array}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Funkcia $f = (2t)^3 + (-1)^3 - 3(2t)(-1) = 8t^3 - 1 + 6t$, $f' = 24t^2 + 6$, teda $t^2 = -\frac{1}{4}$

hrana BC: rovnica $\vec{x} = B + \vec{BC}t$, t.j. $\begin{array}{ccccc} x & = & 2 & + & 0t \\ y & = & -1 & + & 3t \end{array}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Funkcia $f = 8 + (3t-1)^3 - 3(2)(3t-1) = (3t-1)^3 - 6(3t-1) + 8$

$f' = 3(3t-1)^2 \cdot 3 - 18$, t.j. $(3t-1)^2 = 2$, $3t - 1 = \pm\sqrt{2}$, $t = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3}$

$f'' = 18(3t-1) \cdot 3 = 54(3t-1)$, pre $3t - 1 > 0$ lokálne minimum

$t = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$: $x = 2$, $y = 3t - 1 = \sqrt{2}$, t.j. $(2, \sqrt{2})_{min}$, hodnota $f = 8 + 2\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$

$t = \frac{1-\sqrt{2}}{3} < 0$: mimo strany BC

hrana CD: rovnica $\vec{x} = C + \vec{CD}t$, t.j. $\begin{array}{ccccc} x & = & 2 & - & 2t \\ y & = & 2 & + & 0t \end{array}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

Funkcia $f = (2-2t)^3 + 2^3 - 3(2-2t)2 = (2-2t)^3 - 6(2-2t) + 8$

$f' = 3(2-2t)^2(-2) - 6(-2) = -6(2-2t)^2 + 12$, t.j. $(2-2t)^2 = 2$

$f'' = -12(2-2t)(-2) = 24(2-2t)$

$2 - 2t = \sqrt{2}$, $(\sqrt{2}, 2)_{min}$, hodnota $f = 2\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$

$2 - 2t = -\sqrt{2}$: mimo strany CD

hrana DA: rovnica $\vec{x} = D + \vec{DA}t$, t.j. $\begin{array}{ccccc} x & = & 0 & + & 0t \\ y & = & 2 & - & 3t \end{array}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

Funkcia $f = 0 + (2-3t)^3 = (2-3t)^3$

$f' = 3(2-3t)^2(-3) = -6(2-3t)^2$, $2 - 3t = 0$, t.j. $t = \frac{2}{3}$

$f'' = -12(2-3t)(-3) = 36(2-3t)$

$f''' = -108$, bod nie je bodom extrému. $(0, \epsilon)$ a $(0, -\epsilon)$ sa líšia znamienkom, preto na ľubovoľnom okolí existujú hodnoty menšie aj väčšie.

hranice hraníc, t.j. vrcholy obdĺžnika:

A, $f = -1$, body v okoliach sú v tvare $(\delta, -1 + \epsilon)$, $\delta, \epsilon \geq 0$

$f(x,y) = \delta^3 + (-1+\epsilon)^3 - 3\delta(-1+\epsilon) = O(\delta^2) - 1 + 3\epsilon + O(\epsilon^2) + 3\delta + O(\delta\epsilon) = -1 + 3\delta + 3\epsilon + O(\delta^2) + O(\epsilon^2) + O(\delta\epsilon)$. Pre dostatočne malé hodnoty ϵ a δ existuje rýdze okolie, na ktorom sú hodnoty väčšie, t.j. A je minimum.

B, $f = 13$, body v okoliach sú v tvare $(2 - \delta, -1 + \epsilon)$, $\delta, \epsilon \geq 0$, potom

$f(x,y) = (2-\delta)^3 + (-1+\epsilon)^3 - 3(2-\delta)(-1+\epsilon) = 8 - 12\delta + O(\delta^2) - 1 + 3\epsilon + O(\epsilon^2) + 6 - 3\delta - 6\epsilon + O(\delta\epsilon) = 13 - 12\delta - 3\epsilon + O(\epsilon^2) + O(\delta^2) + O(\delta\epsilon)$. Pre dostatočne malé hodnoty ϵ a δ dokážeme nájsť okolie, na ktorom sú hodnoty iba menšie. Preto bod B je maximum.

C, $f = 4$, body v okoliach sú v tvare $(2 - \delta, 2 - \epsilon)$, $\epsilon, \delta \geq 0$

$f(x,y) = (2-\delta)^3 + (2-\epsilon)^3 - 3(2-\delta)(2-\epsilon) = 8 - 12\delta + O(\delta^2) + 8 - 12\epsilon + O(\epsilon^2) - 12 + 6\epsilon + 6\delta + O(\delta\epsilon) = 4 - 6\epsilon - 6\delta + O(\epsilon^2) + O(\delta^2) + O(\delta\epsilon)$. Opäť bod C je maximum.

D, $f = 8$, body v okoliach sú v tvare $(\delta, 2 - \epsilon)$, $\delta, \epsilon \geq 0$

$f(x,y) = \delta^3 + (2-\epsilon)^3 - 3\delta(2-\epsilon) = O(\delta^2) + 8 - 12\epsilon + O(\epsilon^2) - 6\delta + O(\delta\epsilon) = 8 - 12\epsilon - 6\delta + O(\delta^2) + O(\epsilon^2) + O(\delta\epsilon)$. D je maximum.

Minimá: $A : f = -1, (1,1) : f = -1, (2, \sqrt{2}) : f = 8 - 4\sqrt{2}, (\sqrt{2}, 2) : f = 8 - 4\sqrt{2}$. Teda v A a $(1,1)$ sa dosahuje minimálna hodnota -1.

Maximá: $B : f = 13, C : f = 4, D : f = 8$. Maximum je v B a má hodnotu 13.

Minimum: $(0,-1)$, $(1,1)$, hodnota -1; Maximum: $(2,-1)$, hodnota 13

52. $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$ na štvorci $A = (0,0)$, $B = (\pi, 0)$, $C = (\pi, \pi)$, $D = (0, \pi)$

1. lokálne extrémy:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y(-\sin x \cos(x+y) - \cos x \sin(x+y)) = -\cos y \sin(2x+y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x(-\sin y \cos(x+y) - \cos y \sin(x+y)) = -\cos x \sin(x+2y)$

Body x, y musia byť zo štvorca, preto $x, y \in \langle 0, \pi \rangle$

Z $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ dostávame, že $\cos y = 0$, alebo $\sin(2x+y) = 0$, t.j. $y = \frac{\pi}{2}$, alebo $2x+y=0$, alebo $2x+y=\pi$. Podobne z $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ dostávame, že $\cos x = 0$, alebo $\sin(x+2y) = 0$, čiže $x = \frac{\pi}{2}$, alebo $x+2y=0$, alebo $x+2y=\pi$.

Ak nastáva jedna z podmienok $2x+y=0$ alebo $x+2y=0$, tak z kladnosti x, y vyplýva, že $x=y=0$. Dostávame bod z hranice. Zostávajú 4 prípady:

$x=y=\frac{\pi}{2}$: $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x=\frac{\pi}{2}, x+2y=\pi$: $y=\frac{\pi}{4}$, t.j. $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$, $2x+y=\pi, y=\frac{\pi}{2}$: $x=\frac{\pi}{4}$, t.j. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $2x+y=x+2y=\pi$: $x=y=\frac{\pi}{3}$, t.j. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\cos y\cos(2x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin y \sin(2x+y) - \cos y\cos(2x+y) = \cos(2x+2y)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\cos x\cos(x+2y)$

$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sedlový bod

$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sedlový bod

$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sedlový bod

$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, lokálne minimum, hodnota $f = -\frac{1}{8}$

2. extrémy na hranici:

hrana AB: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} t, t \in \langle 0, 1\rangle$, $x = \pi t$, $y = 0$

$f(x,y) = \cos(\pi t)\cos 0 \cos(\pi t) = \cos^2(\pi t)$

$f' = -2\cos(\pi t)\sin(\pi t)\cdot \pi = -\pi \sin(2\pi t)$, $t=0, t=\frac{1}{2}, t=1$. $t=0$ a $t=1$ sú z hranice hranice, preto do úvahy prichádza len $t=\frac{1}{2}$.

$f'' = -\pi\cos(2\pi t)\cdot 2\pi = -2\pi^2\cos(2\pi t)$, pre $t=\frac{1}{2}$ je $f''>0$, t.j. lokálne minimum, bod $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $f=0$.

hrana BC: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $x = \pi$, $y = \pi t$

$f = \cos\pi\cos(\pi t)\cos(\pi + \pi t) = -\cos(\pi t)(-\cos(\pi t)) = \cos^2(\pi t)$. Dostávame tú istú funkciu ako v predošlom prípade, preto opäť extrém nastáva pre $t = \frac{1}{2}$, t.j. lokálne minimum v bode $(\pi, \frac{\pi}{2})$, $f=0$.

hrana CD: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix} t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $x = \pi - \pi t$, $y = \pi$

$f = \cos(\pi - \pi t)\cos\pi\cos(2\pi - \pi t) = (-\cos(\pi t))(-1)\cos(\pi t) = \cos^2(\pi t)$. Podobne ako predtým dostávame, že $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ je lokálne minimum a $f=0$.

hrana DA: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix} t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $x = 0$, $y = \pi - \pi t$

$f = \cos 0\cos(\pi - \pi t)\cos(\pi - \pi t) = (-\cos(\pi t))(-\cos(\pi t)) = \cos^2(\pi t)$, t.j. pre $t = \frac{1}{2}$ je $(0, \frac{\pi}{2})$ lokálne minimum, $f=0$

hranice hraníc, t.j. vrcholy štvorca:

A: $f=1$ body okolí sú v tvare (δ, ϵ), $\delta, \epsilon \geq 0$. $f = \cos\delta\cos\epsilon\cos(\delta+\epsilon)$. Ak aspoň jedna z hodnôt δ alebo ϵ je nenulová, tak pre dostatočne malé hodnoty ϵ a δ(napr. $\delta, \epsilon < \frac{\pi}{4}$) dostávame hodnoty ostro menšie ako 1. Takže bod A je lokálne maximum s hodnotou 1.

B: $f=1$ body okolí sú v tvare $(\pi - \delta, \epsilon)$, $\delta, \epsilon \geq 0$

$f = \cos(\pi - \delta)\cos\epsilon\cos(\pi - \delta + \epsilon) = -\cos\delta\cos\epsilon(-\cos(\epsilon - \delta)) = \cos\delta\cos\epsilon\cos(\epsilon-\delta) \leq \cos\delta\cos\epsilon \leq 1$. Opäť, ak aspoň jedna z hodnôt $\delta(\epsilon)$ je nenulová, tak dostávame ostro menšiu hodnotu ako 1. Existuje rýdze okolie $(\pi, 0)$ s hodnotami ostro menšími ako 1.

C: $f=1$ (skrátene) body okolí $(\pi - \delta, \pi - \epsilon)$, $\delta, \epsilon \geq 0$

$f = \ldots = \cos\delta\cos\epsilon\cos(\delta+\epsilon)$. Situácia je rovnaká ako pre bod A, preto C je tiež lokálne maximum s hodnotou 1.

D: $f=1$ (skrátene) body okolí $(\delta, \pi - \epsilon)$, $\delta, \epsilon \geq 0$

$f = \ldots = \cos\delta\cos\epsilon\cos(\delta - \epsilon)$. Keďže $\cos(-x) = \cos(x)$, možno tento prípad previesť na prípad pre B, t.j. D je lokálne maximum s hodnotou 1.

Minimá: $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$: $f = -\frac{1}{8}$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(0, \frac{\pi}{2})$: $f=0$. T.j. bod $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ je minimum.

Maximá: A, B, C, D: $f = 1$

$$\boxed{\text{Minimum: } (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}), \text{ hodnota } -\tfrac{1}{8}, \text{ Maximum: } (0,0), (\pi,0), (\pi,\pi), (0,\pi), \text{ hodnota } 1}$$

53. $f(x, y) = x^2 + y^2$, na kruhu $x^2 + y^2 \leq 4$

Hodnota funkcie f závisí od vzdialenosti bodu kruhu od stredu kruhu - druhá mocnina vzdialenosti. Táto vzdialenosť môže byť od 0 do 2(polomer kruhu) vrátane. Preto f nadobúda len hodnoty od 0 do 4. Minimum je v strede kruhu $(0, 0)$ a maximum sa dosahuje na hraničnej kružnici.

$$\boxed{\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}_{max}, (0, 0)_{min}}$$

54. $f(x, y, z) = x + y + z$, na oblasti $1 \geq x \geq y^2 + z^2$

Funkcia f nemá lokálne extrémy. (Prvé parciálne derivácie sú stále rovné 1.) Útvar je kužeľ s osou rovnou osi x, vrcholom $(0, 0, 0)$ a základňa v rovine $x = 1$ je kruh s polomerom 1, výška 1. Hranica oblasti je teda plášť a podstava. Plášť tvoria body v tvare $(t, \sqrt{t}\cos\varphi, \sqrt{t}\sin\varphi)$, kde $t \in \langle 0, 1\rangle$ a $\varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Funkcia f je na plášti rovná: $f(x, y, z) = g(t, \varphi) = t + \sqrt{t}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi$

$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}(\cos\varphi + \sin\varphi)$

$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \sqrt{t}(\cos\varphi - \sin\varphi)$

Vnútro plášťa dostávame, pre hodnoty $t \in (0, 1)$. Podmienky na lokálny extrém nám dávajú, že $\cos\varphi = \sin\varphi$. Na $\langle -\pi, \pi\rangle$, to môže nastať pre nasledovné φ: $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$.

$\varphi = \frac{\pi}{4}$: Z $\frac{\partial g}{\partial t}$ dostávame: $0 = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}(\sqrt{2})$, t.j. $\sqrt{t}$ sa má rovnať zápornému číslu, čo nie je možné.

$\varphi = \frac{3\pi}{4}$: Opäť z $\frac{\partial g}{\partial t}$ máme: $0 = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}}\sqrt{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2t}}$, t.j. $t = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $\quad \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(\cos\varphi - \sin\varphi)$, $\quad \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = -\sqrt{t}(\cos\varphi + \sin\varphi)$

Pre $t = \frac{1}{2}$ a $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, t.j. lokálne minimum v bode $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, hodnota $f = -\frac{1}{2}$

Podstavu tvoria body tvaru: $(1, t\cos\varphi, t\sin\varphi)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $\varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Vnútro pre $0 < t < 1$. Na podstave sa funkcia f rovná:

$f(x, y, z) = h(t, \varphi) = 1 + t\cos\varphi + t\sin\varphi$

$\frac{\partial h}{\partial t} = \cos\varphi + \sin\varphi$, $\quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = t(\cos\varphi - \sin\varphi)$.

Dostávame podmienky: $t = 0$, alebo $\cos\varphi - \sin\varphi = 0$, ale pre $t = 0$ je bod hranice.

$\cos\varphi = \sin\varphi$: Teda $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$, alebo $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ale $\frac{\partial h}{\partial t} = 2\sin\varphi$, čo nie je 0 pre tieto hodnoty φ.

Hranica plášťa je bod $(0, 0, 0)$ a $x = 1, y^2 + z^2 = 1$.

Hranica podstavy je opäť $x = 1, y^2 + z^2 = 1$ a bod $(1, 0, 0)$.

V $(0, 0, 0)$ je hodnota $f = 0$.

V $(1, 0, 0)$ je hodnota $f = 1$.

Hranica podstavy resp. plášť: $x = 1$, $y = \cos\varphi, z = \sin\varphi$, $\varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

Funkcia $f(x, y, z) = k(\varphi) = 1 + \cos\varphi + \sin\varphi$. $k' = \cos\varphi - \sin\varphi$, $k'' = -\cos\varphi - \sin\varphi$.

Z podmienky $\cos\varphi = \sin\varphi$ dostávame $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$, alebo $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Pre $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ je $k'' > 0$, t.j. ide o lokálne minimum, hodnota $1 - \sqrt{2}$.

Pre $\varphi = \frac{\pi}{4}$ je $k'' < 0$, t.j. ide o lokálne maximum, hodnota $1 + \sqrt{2}$.

Minimálna hodnota je $-\frac{1}{2}$ v bode $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Maximum je zase $1 + \sqrt{2}$ v $(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$\boxed{\text{Minimum: } (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), f = -\tfrac{1}{2}, \text{ Maximum: } (1, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}), f = 1 + \sqrt{2}}$$