Dr. Martin Langer
Dr. Tibor Macko
Sommersemester 2012

Seminar S1G1
„Coxeter-Gruppen“

Montag 14-16, Raum 1.007
Vorbesprechung: Mittwoch, 1.2.2012, 14 ct in N0.008

Mit $O(n)$ bezeichnen wir die Gruppe der orthogonalen linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, oder, was dasselbe ist, die längenerhaltenden linearen Abbildungen. Man kann nun nach endlichen Untergruppen von $O(n)$ fragen; interessante Beispiele hierfür liefern Symmetriegruppen von geometrischen Gebilden wie regelmäßigen n-Ecken, Polyedern und höher-dimensionale Verallgemeinerungen hiervon. Leider ist es bisher nicht möglich, die endlichen Untergruppen zu klassifizieren; man kann sich aber auf eine interessante Unterklasse von Gruppen beschränken, die sogenannten Coxeter-Gruppen. In diesem Seminar bezeichnen wir mit *Coxeter-Gruppe* jede endliche Untergruppe von $O(n)$, die von Spiegelungen erzeugt wird. Hierbei ist mit Spiegelung die Spiegelung an einer Hyperebene, also einem $(n-1)$-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^n$, gemeint. Das Ziel ist nun, die Coxeter-Gruppen zu klassifizieren, und dies ist tatsächlich auch gut möglich. Man kann jeder Coxeter-Gruppe einen sogenannten Coxeter-Graph zuordnen, und umgekehrt ist die Gruppe durch ihren Graphen eindeutig bestimmt. Am Ende des Seminars werden wir auch noch einsehen, dass Coxeter-Gruppen sehr einfache Gruppenpräsentationen zulassen.

In dem Seminar werden wir eine große Klasse interessanter Gruppen kennenlernen, die auch in aktueller Forschung eine wichtige Rolle spielen. Insbesondere werden wir sehr viele Beispiele nicht-kommutativer Gruppen behandeln, die aber nicht nur rein abstrakt sondern geometrisch definiert sind. Vorausgesetzt wird ein gutes Verständnis der linearen Algebra, ein wenig geometrische Intuition sowie mangelnde Scheu davor, auch mal ein konkretes Beispiel durchzurechnen.

Wir werden im wesentlichen ein Buch durchgehen, nämlich [GB]. Alle Quellenangaben beziehen sich hierauf, sofern nicht anders angegeben.

Vortrag 1 (02.04.2012, Bunlong Lay)**.** *Vorbereitungen aus der Algebra*
Skalarprodukte, Orthogonalität, orthogonale Abbildungen ([KM], § 7.1, § 7.2, § 7.5)

Vortrag 2 (16.04.2012, Monika Büttner)**.** *Zweidimensionaler Fall*
Gruppenwirkungen, endliche Gruppen im zweidimensionalen Fall (§1, §2.1-§2.2))

Vortrag 3 (23.04.2012, Florian Jüsten)**.** *Dreidimensionaler Fall*
Orthogonale Abbildungen und endliche Gruppen im dreidimensionalen Fall (§2.3-§2.6))

Vortrag 4 (30.04.2012, Zhengcheng Lu)**.** *Fundamentalbereiche*
Topologie. Fundamentalbereiche (Seite 2, ab „The length...“ bis inkl. Seite 3 erster Absatz; dann §3)

Vortrag 5 (07.05.2012, Stefan Eysoldt)**.** *Wurzelsysteme I*
Definition Coxeter-Gruppen und Wurzelsysteme, t-positiv und t-negativ für einen Vektor t, t-Basis (§4.1 bis vor Prop. 4.1.8)

Vortrag 6 (14.05.2012, Isabell Große-Brauckmann). *Wurzelsysteme II*
Eindeutigkeit der t-Basis, Fundamentalspiegelungen erzeugen die Coxeter-Gruppe, Fundamentalbereiche für Coxeter-Gruppen (§4.1 ab Prop. 4.1.8, §4.2 ohne Prop. 4.2.6)

Vortrag 7 (21.05.2012, Dariusz Chmielewski). *Coxeter-Graphen*
Coxeter-Graphen, Positiv-Definitheit, Irreduzibilität, Liste möglicher Graphen (§5.1 bis vor Prop. 5.1.6)

Vortrag 8 (04.06.2012, Marc Brodeur). *Crystallographische Gruppen*
Mögliche Coxeter-Graphen, Crystallographische Gruppen und zugehörige Graphen (§5.1 ab Seite 61, §5.2)

Vortrag 9 (11.06.2012, Benedikt Fluhr). *Konstruktion irreduzibler Coxeter-Gruppen*
Typen A_n, B_n und D_n vollständig; Angabe einer Basis für übrige Typen (§5.3 bis Ende Seite 71)

Vortrag 10 (18.06.2012, Wolfgang Leyrer). *Klassifikationssatz*
Explizite Wurzelsysteme für übrige Typen aus vorhergehendem Vortrag, Abschluss des Klassifikationssatzes, Ordnung der irreduziblen Coxeter-Gruppen (§5.3 ab Seite 72, §5.4)

Literatur

[GB] L. C. Grove, C. T. Benson *Finite reflection groups.* Springer, 2. Auflage, 1985.

[Cea] T. Camps et al. *Einführung in die kombinatorische und die geometrische Gruppentheorie.* Heldermann Verlag, Lemgo, 2008

[KM] H.-J. Kowalsky, G. O. Michler *Lineare Algebra.* de Gruyter, 11. Auflage, 1998

[B] S. Bosch, *Algebra.* Springer, 2009

Genaueres zu Vortrag 1

Grundsätzlich: wir behandeln nur den reellen Fall, also immer nur „bilinear“ und „orthogonal“, niemals „hermitesch“ oder „unitär“. Alle Angaben beziehen sich auf [KM].

- Bilinearform, Skalarprodukt, Beispiele §7.1 bis inkl. 7.1.5.
- Länge. Schwarzsche Ungleichung. Winkel. Orthogonalität. §7.2 bis inkl. 7.2.12.
- orth. Komplement. 7.3.4–7.3.6.
- Orthogonale Abbildung. 7.5.1,7.5.2. Orthogonale Matrix 7.5.5–7.5.11.

Genaueres zu Vortrag 2

Wiederholung: Definition des Begriffs „Gruppe“. Dann in [B]:

- §1.2 bis vor Satz 6.
- Als Beispiele zyklische Gruppen.
- Gruppenwirkungen (oder -aktionen): §5.1 bis inkl. Bemerkung 5.

Dann §2.1 und §2.2 in [GB].