Topológia vysoko-rozmerných variet

Tibor Macko

MU SAV
www.mat.savba.sk/macko

Úvod

Plán

- Definície, príklady a problémy v topológii variet
- Klasifikačné problémy v topológii variet
- Topologické invarianty: homotopické a homologické grupy
- Veta o s-kobordizme a algebraická K-teória
- Teória chirurgií a algebraická L-teória
- Výsledky a otvorené problémy

Variety

Definícia

Nech $n \geq 0$. Pod n-rozmernou topologickou varietou rozumieme topologický priestor M, ktorý je:

- hausdorffovský so spočítateľnou bázou topológie
- n-rozmerný lokálne euklidovský

Poznámka

- topologická varieta = manifold
- hladká varieta = smooth manifold
- varieta s hranicou
- uzavretá varieta = kompaktná varieta bez hranice

Príklady variet

Príklad

- $\mathbb{R}^n$, D^n
- S^1, $S^1 \times \cdots \times S^1$, S^n, $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$
- F_g^+, F_g^-, Kleinova fl'aša, Möbiov pásik
- $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $G_{n,k}(\mathbb{R})$, $G_{n,k}(\mathbb{C})$
- $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$
- $M \times N$, $M \# N$
- Konfiguračné priestory, fázové priestory a časopriestor vo fyzike
- Priestory stratégií v teórii hier

Čo by sme chceli vedieť?

Otázky

- Klasifikačné problémy
- Symetrie
- Problém vektorových polí
- Klasifikácia zobrazení

Klasifikácia pre $n \leq 2$

$n = 0$

$M = \bullet$

$n = 1$

$M = S^1$

$n = 2$

$M = F_g^+$ a máme $\chi(F_g^+) = V - E + F = 2 - 2g$

alebo

$M = F_g^-$ a máme $\chi(F_g^-) = V - E + F = 2 - g$

Klasifikácia pre $n = 3$

Toto je ťažšie lebo $\chi(M^3) = 0$, príklady: $S^1 \times F_g^{\pm}$, S^3, $\mathbb{R}P^3$, $S^2 \rtimes S^1$, ...

Homotópia

$f \simeq g\colon Z \to Y$ ak $\exists\, H\colon Z \times [0,1] \to Y$ t.ž. $H|_{Z\times 0} = f$ a $H|_{Z\times 1} = g$

Fundamentálna grupa priestoru X

$\pi_1(X, x_0) = \{c\colon [0,1] \to X \mid c(0) = c(1) = x_0\}/\simeq$, $c * d =$ spojenie

Veta (Poincarého hypotéza, Perel'man 2003)

Ak $\pi_1(M^3) = 1$ tak $M \cong S^3$.

Veta (Thurstonova geometrizačná domnienka, Perel'man 2003)

M^3 možno jednoznačne rozložiť na podvariety, z ktorých každá má jeden z 8 geometrických typov popísaných Thurstonom.

Šošovkové priestory

Homotopická ekvivalencia

$X \simeq Y$ ak $\exists\, f : X \leftrightarrow Y : g$ t.ž. $g \circ f \simeq 1_X$ a $f \circ g \simeq 1_Y$

Šošovkové priestory definícia

$L(N, k, l) = D^3 / \sim_{k,l}$ a máme $\pi_1(L(N, k, l)) \cong \mathbb{Z}/N$

Šošovkové priestory príklad

$L(7, 1, 1) \simeq L(7, 2, 1)$ ale $L(7, 1, 1) \not\cong L(7, 2, 1)$

Klasifikácia pre $n \geq 4$

Nemožná!

Realizovatel'nost' grúp ako π_1

$\forall n \geq 4$ a $\forall G = \langle S \mid R \rangle$ t.ž. $|S| < \infty, |R| < \infty$ $\exists$ M^n_G t.ž. $\pi_1(M^n_G) \cong G$

Veta (Novikov)

Neexistuje algoritmus, ktorý by rozlíšil či sú dve konečne prezentované grupy izomorfné.

Konštrukcia chirurgiou

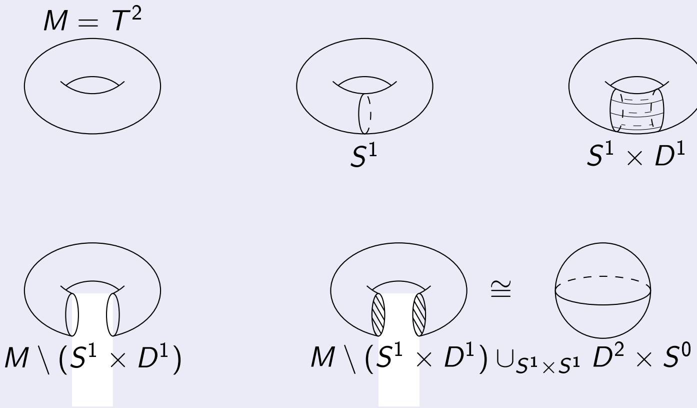
$$M^n_S = (S^1 \times S^{n-1}) \# \cdots \# (S^1 \times S^{n-1})$$

$$\forall r \in R \,\exists\, \overline{r} \colon S^1 \times D^{n-1} \hookrightarrow M^n_S \quad \text{t.ž.} \quad r = [\overline{r}] \in \pi_1(M^n_S) = F(S)$$

$$M_G := \big(M_S \smallsetminus \sqcup_{r \in R} \mathrm{int}\, \overline{r}(S^1 \times D^{n-1})\big) \cup_{\overline{r}(S^1 \times S^{n-2})} \sqcup_{r \in R} \big(D^2 \times S^{n-2}\big)$$

Konštrukcia chirurgiou

Figure (Konštrukcia chirurgiou)



Invarianty v algebraickej topológii I

Homotopické grupy

$\pi_k(X, x_0) = \{c\colon [0,1]^k \to X \mid c(\partial([0,1]^k)) = x_0\}/\simeq$, $c * d =$ spojenie

Homotopické grupy sú silný invariant variet

$f\colon M \to N$ je $\simeq$ vtedy a len vtedy ak $\forall k$ máme $\pi_k(f)\colon \pi_k(M) \to \pi_k(N)$.

Problém

π_k je ťažké spočítať hoci pre $k \geq 2$ máme, že $\pi_k(M)$ je abelovská.

Dôvod

Nemáme dobrý vzťah medzi $\pi_k(X_1 \cup_{X_0} X_2)$ a $\pi_k(X_0)$, $\pi_k(X_1)$, $\pi_k(X_2)$.

Invarianty v algebraickej topológii II

Singulárny reťazcový komplex priestoru X

$C_k(X) := \mathbb{Z}\langle \sigma : \Delta^k \to X \rangle$ pre každé $k \geq 0$
$\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ def ako $\partial_k(\sigma) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\sigma \circ d_k^i)$

Reťazcový komplex

Máme $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ pre každé k.

Homologické grupy priestoru X

$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X) = \ker(\partial_k)/\mathrm{im}(\partial_{k+1})$.

Mayer-Vietorisova postupnosť pre $X = X_1 \cup_{X_0} X_2$

$\cdots \to H_{k+1}(X) \to H_k(X_0) \to H_k(X_1) \oplus H_k(X_2) \to H_k(X) \to H_{k-1}(X_0) \cdots$

Invarianty v algebraickej topológii III

Prieseková forma pre M^{4k}

$\lambda_M \colon H_{2k}(M) \times H_{2k}(M) \to \mathbb{Z}$

Signatúra variety M^{4k}

$\mathbf{sign}(M) := \mathbf{sign}(\lambda_M \otimes \mathbb{R})$

Invariancia vzhľadom na kobordizmus

Ak $M^{4k} = \partial(V^{4k+1})$ tak $\mathbf{sign}(M) = 0$.

Dôsledok

$\mathbb{C}P^2$ nie je hranicou žiadnej 5-rozmernej kompaktnej variety.

Invarianty v algebraickej topológii IV

Poincarého dualita

Pre orientovateľnú M^n máme $[M] \in H_n(M;\mathbb{Z})$ a

$$- \cap [M] \colon H^k(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M;\mathbb{Z}).$$

Invarianty v algebraickej topológii IV

Poincarého dualita

Pre orientovateľnú M^n máme $[M] \in H_n(M;\mathbb{Z})$ a

$$- \cap [M] \colon H^k(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M;\mathbb{Z}).$$

Zovšeobecnené homologické grupy

Nech $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_n, s_n \colon S^1 \wedge \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_{n+1})_{n \geq 0}$ je "spektrum" v zmysle teórie homotópií. Potom pre

$$H_k(X;\mathbf{E}) := \operatorname{colim}_n \pi_{k+n}(X_+ \wedge \mathbf{E}_n)$$

máme Mayer-Vietorisovu postupnosť. Medzi príklady patria kobordizmus alebo topologická K-teória.

Veta o h-kobordizme

Definícia (Kobordizmus)

$M^n \sim N^n$ ak existuje V^{n+1} t.ž. $\partial V = M \sqcup N$.

Definícia (h-kobordizmus)

$M^n \sim_h N^n$ ak existuje V^{n+1} t.ž. $\partial V = M \sqcup N$ a $M \hookrightarrow V$ a $N \hookrightarrow V$ sú homotopické ekvivalencie.

Veta o h-kobordizme (Smale 1962)

Ak $n \geq 5$ a $M^n \sim_h N^n$ a $\pi_1(M) = \{1\}$ tak $M \cong N$.

Zovšeobecnená Poincarého hypotéza (Smale 1961, Freedman 1982)

Ak $n \geq 4$ a $M \simeq S^n$ tak $M \cong_{\mathrm{TOP}} S^n$.

Algebraická K-teória

Uvažujme asociatívny okruh R s 1, napríklad $R = \mathbb{Z}G$.

Definícia $K_1(R)$

$$K_1(R) := \mathrm{GL}(R)/[\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R)] \quad \text{kde} \quad \mathrm{GL}(R) = \mathrm{colim}_n \mathrm{GL}(n, R)$$

Definícia $\mathrm{Wh}(G)$

$$\mathrm{Wh}(G) := K_1(\mathbb{Z}G)/(\pm G)$$

Veta o s-kobordizme

Nech M^n je varieta s $\pi_1(M) = G$ a $n \geq 5$. Potom máme bijekciu

$$\tau : \{\text{iso triedy h-kob nad } M\} \leftrightarrow \mathrm{Wh}(G)$$

Šošovkové priestory

Veta (folk)

Pre p nepárne prvočíslo máme surjektívne $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}/p) \to \mathbb{Z}^{(p-3)/2}$.

Klasifikácia šošovkových priestorov (Reidemeister, Franz)

$L(N, k_1, \ldots, k_n) \cong L(N, l_1, \ldots, l_n)$ vtedy a len vtedy ak existuje $\sigma : \underline{n} \to \underline{n}$, $c \in (\mathbb{Z}/N)^*$ a $\epsilon_i = \pm 1$ t.ž. $k_i \equiv \epsilon_i \cdot c \cdot l_{\sigma(i)} \in \mathbb{Z}/N$ pre $1 \leq i \leq n$.

Dôkaz využíva Reidemeisterovu torziu, ktorá je vylepšením Whiteheadovej torzie $\tau \in \mathrm{Wh}(G)$.

Exotické sféry

Veta (Milnor 1956)

Existuje 7-rozmerná hladká varieta Σ^7 taká, že

$$\Sigma^7 \cong_{\mathsf{TOP}} S^7 \quad \text{ale} \quad \Sigma^7 \not\cong_{\mathsf{DIFF}} S^7$$

Hirzebruchova veta o signatúre (1954)

$$\mathbb{Z} \ni \mathbf{sign}(M) = \langle \mathcal{L}(M), [M] \rangle \in \mathbb{Q}$$

Problém

Klasifikácia všetkých takých Σ.

Teória chirurgií I

Nech X je konečný n-rozmerný geometrický Poincarého komplex.

Pod varietovou štruktúrou na X rozumieme $f : M \xrightarrow{\simeq} X$ kde M je n-varieta.

Definujme
$$(f_0 : M_0 \xrightarrow{\simeq} X) \sim (f_1 : M_1 \xrightarrow{\simeq} X)$$
ak existuje $h : M_0 \xrightarrow{\cong} M_1$ t. ž.
$$f_1 \circ h \simeq f_0.$$

Definícia

Pod štruktúrnou množinou priestoru X rozumieme
$$\mathcal{S}(X) := \{f : M \xrightarrow{\simeq} X\}/\sim$$

Normalové invarianty I

Nech X je konečný n-rozmerný geometrický Poincarého komplex.

Pod normálovým zobrazením stupňa jedna na X rozumieme

$$(f, \overline{f}) \colon M \to X$$

kde M je n-varieta a $\overline{f} \colon \nu_M \to \xi$ je bandlové zobrazenie.

$$\begin{tikzcd} \nu_M \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Mimochodom $S(\xi) \simeq \nu_X$ kde ν_X je Spivakova normálová fibrácia.

Normalové invarianty II

Nech X je konečný n-rozmerný geometrický Poincarého komplex.

Definujme

$$((f_0, \overline{f}_0) \colon M_0 \to X) \sim ((f_1, \overline{f}_1) \colon M_1 \to X)$$

ak existuje

$$(F, \overline{F}) \colon (W; M_0, M_1) \to (X \times [0,1], X \times 0, X \times 1)$$

t. ž. pre $j = 0, 1$

$$(F, \overline{F}) \circ i_j = (f_j, \overline{f}_j).$$

Definícia

Pod normálovými invariantami na X rozumieme

$$\mathcal{N}(X) := \{(f, \overline{f}) \colon M \to X\} / \sim$$

V princípe vieme $\mathcal{N}(X)$ spočítať (Pontrjagin-Thom).

Chirurgické prekážky I

Nech $(f, \overline{f}) \colon M \to X$ je normálové zobrazenie stupňa jedna.
Ako zmeniť $(f, \overline{f})$ na homotopickú ekvivalenciu?
Chirurgiou: Predpokladajme, že vieme reprezentovať prvok $0 \neq \alpha \in \pi_k(f)$ ako (pričom q je vloženie):

$$\begin{tikzcd} S^k \times D^{n-k} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "j"'] & M \arrow[d, "f"] \\ D^{k+1} \times D^{n-k} \arrow[r, "Q"'] & X \end{tikzcd}$$

Skonštruujme:

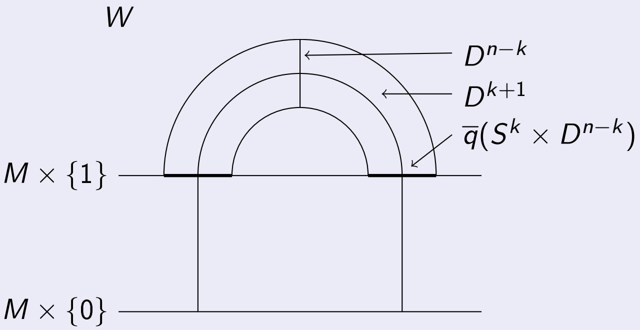
$$M' := D^{k+1} \times S^{n-k-1} \cup_{\mathrm{im}(q|_{S^k \times S^{n-k-1}})} (M - (\mathrm{im}(q)))\,.$$

$$W = D^{k+1} \times D^{n-k} \cup_q M \times [0,1],$$

Toto zničí α.

Chirurgické prekážky II

Figure (Normálový kobordizmus)



Chirurgické prekážky III

Chirurgia potenciálne zmení $H_i(M)$ pre $i = k, k+1$ a $n-k, n-k-1$. Preto funguje dobre len pre $2k+1 < n$.

Pre $2k = n$ a $2k+1 = n$ máme vo všeobecnosti prekážky.

$L_{2k}(R)$:= nedeg $(-1)^k$-kvadratické formy modulo hyperbolické formy $/R$.

$L_{2k+1}(R)$:= automorf $(-1)^k$-kvadratických hyperbolických foriem $/R$.

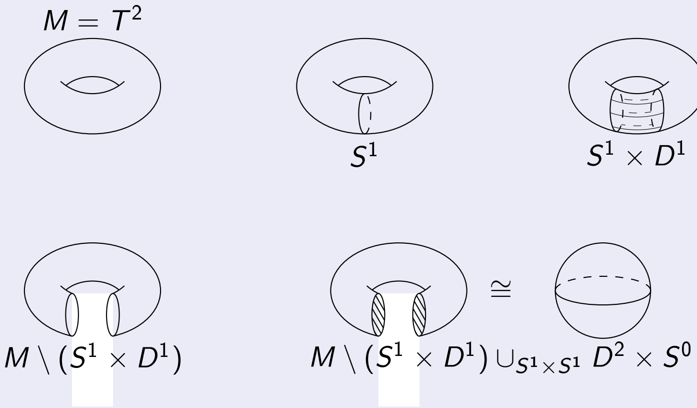
Veta (o chirurgických prekážkach, Wall 1967)

Nech $G = \pi_1(X)$ a nech $(f, \overline{f})$ je norm zobr stupňa jedna pričom $n \geq 5$. Potom existuje prvok $\mathbf{qsign}(f, \overline{f}) \in L_n(\mathbb{Z}G)$ t. ž. $\mathbf{qsign}(f, \overline{f}) = 0$ vtedy a len vtedy ak $(f, \overline{f}) \sim (f', \overline{f}')$ kde f' je homotopická ekvivalencia.

$\mathbf{qsign} \colon \mathcal{N}^{\mathrm{TOP}}(X) \to L_n(\mathbb{Z}G)$

Chirurgické prekážky IV

Figure (Súčin sfér)



Exaktná postupnosť chirurgií

Nech X je konečný n-rozmerný geometrický Poincarého komplex.

Exaktná postupnosť chirurgií pre X ($\dim(X) = n \geq 5$, $G = \pi_1(X)$)

$$\cdots \mathcal{N}_\partial(X \times I) \xrightarrow{\textbf{qsign}} L_{n+1}(\mathbb{Z}G) \xrightarrow{\partial} \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{N}(X) \xrightarrow{\textbf{qsign}} L_n(\mathbb{Z}G)$$

∂ - "plumbing"

$\mathcal{N}^{\mathrm{TOP}}(X) \cong [X; \mathrm{G/TOP}] \quad \sim \quad H^*(X; \mathbb{Z}_{(2)}),\ H^*(X; \mathbb{Z}/2),\ KO^*(X)[1/2].$

$\mathcal{N}^{\mathrm{DIFF}}(X) \cong [X; \mathrm{G/O}] \quad \sim \quad J_n : \pi_n \mathrm{SO} \to \pi_n^S.$

$L_i(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}_2, 0$

Výsledky I

Homotopické sféry $\Theta^n := \mathcal{S}^{\mathrm{DIFF}}(S^n)$

$$0 \to bP^{n+1} \to \Theta^n \to \operatorname{coker} J_n \xrightarrow{\theta_n} (0 \text{ alebo } \mathbb{Z}/2)$$

$$bP^{n+1} \quad \text{konečná cyklická grupa, rád známy } \forall n \neq 125$$

$$J_n : \pi_n SO \to \pi_n^S \quad \operatorname{coker} J_n \text{ konečná ab grupa, rád známy pre } n \leq 60$$

$$\theta_n = ? \text{ pre } n = 126 \quad \theta_n = 0 \text{ pre } n \neq 6, 14, 30, 62, 126$$

$$\theta_n \text{ surj na } \mathbb{Z}/2 \text{ pre } n = 6, 14, 30, 62$$

$$|\Theta^n| = 1, 1, ?, 1, 1, 1, 28, 2, 8, 6, 992, 1, 3, 2, 16256$$

Kervaire-Milnor (1963), Browder (1969), Hill-Hopkins-Ravenel (2008),...

Výsledky II

Príklady pre $\pi_1 = \{1\}$ (Smale, Wall)

$$\mathcal{S}^{TOP}(S^n) = \{1\} \quad (GPC)$$

$$\mathcal{S}^{TOP}(S^n \times S^m) = L_n(\mathbb{Z}) \oplus L_m(\mathbb{Z})$$

$$\mathcal{S}^{TOP}(\mathbb{C}P^n) = \oplus_{i=1}^{n-1} L_{2i}(\mathbb{Z})$$

Príklady pre $\pi_1 \neq \{1\}$ (Browder, Petrie, Wall, López de Medrano)

$$\mathcal{S}^{TOP}(\mathbb{R}P^n) = (\mathbb{Z}\oplus) \oplus_{i=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \mathbb{Z}/2$$

Vlastné články k téme: M (2007) a M-Weiss (2009) o $\mathcal{S}_\partial^{TOP}(\mathbb{R}P^n \times D^k)$.

Výsledky III

Falošné šošovkové priestory

- Ak N je nepárne, tak (Wall 1970)

$$\rho : \mathcal{S}^{TOP}(L_N^{2d-1}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^{(N-1)/2}$$

- Ak $N = 2^K \cdot M$, tak (Wall 1970, M-Wegner 2009,2011, M 2013)

$$\rho \oplus \mathbf{t}_{2*} : \mathcal{S}^{TOP}(L_N^{2d-1}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^{N/2-1}(\oplus\mathbb{Z}) \oplus_{i=1}^{\lfloor d/2 \rfloor} \mathbb{Z}/2^{\max\{2i,2^K\}} \oplus_{i=1}^{\lfloor d/2 \rfloor} \mathbb{Z}/2$$

Problém sférických priestorových foriem (Madsen-Thomas-Wall 1976)

Konečná grupa G pripúšťa voľnú akciu na S^{2d-1} pre nejaké d vtedy a len vtedy, ak každá jej podgrupa rádu $2p$ alebo p^2 pre p prvočíslo je cyklická.

Výsledky IV

Asférické variety

Varieta M sa nazýva asférická ak $\pi_n(M) = 0$ pre $n \neq 1$.
V tomto prípade musí byt' $\pi_1(M) = G$ bez torzie.
Napríklad $T^n = (S^1)^n$ má $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$.

Borelova hypotéza

Ak M je asférická, tak

$$\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(M) = \{1\}.$$

Metóda na dôkaz Borelovej hypotézy

Farrell-Jonesova hypotéza o assembly zobrazeniach. Táto je známa pre vel'kú triedu grúp, napr. pre hyperbolické, CAT(0), riešitel'né grupy a dobre sa dedí vzhl'adom na mnohé konštrukcie (pozri Bartels-Lueck 2012).

Assembly zobrazenia

Geometrická exaktná postupnosť chirurgií $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ Algebraická exaktná postupnosť chirurgií

$$\begin{tikzcd}
L_{n+1}(\mathbb{Z}[\pi]) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "="] & \mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{qsign}_X", "\cong"'] & \mathcal{N}^{\mathrm{TOP}}(X) \arrow[r, "\mathbf{qsign}"] \arrow[d, "\mathbf{qsign}_X", "\cong"'] & L_n(\mathbb{Z}[\pi]) \arrow[d, "="] \\
L_{n+1}(\mathbb{Z}[\pi]) \arrow[r, "\partial"] & \mathbb{S}_{n+1}(X) \arrow[r] & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet\langle 1\rangle) \arrow[r, "\mathrm{asmb}"] & L_n(\mathbb{Z}[\pi])
\end{tikzcd}$$

kde $\mathbb{S}_{n+1} = \pi_0 \mathbf{S}(X)$.

Toto využíva algebraickú teóriu chirurgií (Ranicki).

Vlastné články o téme:
Kuehl-M-Mole: The total surgery obstruction revisited (2013)
Crowley-M: The additivity of the ρ-invariant... (2011)
Adams-Florou-M: L-homology on ball complexes (2017)

Ďal'šie aplikácie a otvorené problémy

Ďal'šie aplikácie

- automorfizmy variet - Madsen-Weiss (2007), Galatius-Randal-Williams (2014-) (vlastný článok: Grunewald-Klein-M 2008)
- skalárna krivost', C^*-algebry - Schick, Stolz, Higson-Roe (2000-)
- topologické (kvantové) teórie pol'a (Atiyah,Lurie)

Problémy

- Borelova hypotéza vo všeobecnosti
- Kervaireov invariant v dimenzii 126
- Existencia exotických asférických homologických variet
- akcie na súčinoch sfér
- grupová v struktúra na $\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X)$
- viac výpočtov $\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X)$ pre $\pi_1(X)$ nekonečné

Vlastné projekty

Projekty

- $\mathcal{S}_\partial(X)$ pre konkrétne X (s FMFI UK)
- $\mathbb{S}_n(X)$ a súčiny (Adams-Florou-M,M)
- Borelove variety (Crowley-M)
- Základy algebraickej teórie chirurgií (Crowley-Lueck-M)

Pod'akovanie

Táto práca bola podporovaná Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. APVV-16-0053.