BACHELORARBEITTHEMA: CLIFFORDALGEBREN

TIBOR MACKO

Definition 0.1. *Let V be a finite dimensional vector space over a field k and let $q\colon V \to k$ be a quadratic form on V.*

Define the tensor algebra *on V by*

$$\mathcal{T}(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r V$$

Define the following ideal associated with q:

$$\mathcal{I}_q = \langle v \otimes v + q(v) \cdot 1 \mid v \in V \rangle$$

The Clifford algebra *associated to V and q is defined as*

$$\mathrm{Cl}(V, q) = \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}_q(V)$$

Example 0.2. *Let $k = \mathbb{R}$, let $V = \mathbb{R}^{r+s}$ and let*

$$q_{r+s} = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$$

Denote

$$\mathrm{Cl}_{r,s} = \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{r+s}, q_{r+s})$$

Then we have

$$\mathrm{Cl}_{1,0} = \mathbb{C} \quad \mathrm{Cl}_{0,1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \quad \mathrm{Cl}_{2,0} = \mathbb{H}$$

The algebras $\mathrm{Cl}_{r,s}$ for bigger r, s are in general interesting algebras with zero divisors that have many geometric applications.

Ziel 1: Klassifikation von Clifford Algebren $\mathrm{Cl}_{r,s}$ mittels Darstellungen.

Theorem 0.3. *Let $\mathbb{R}^{N+1}$ be a module over $\mathrm{Cl}_{k,0}$. Then there exist k linearly independent vector fields on S^N.*

Ziel 2: Benutze die Klassifikation im Beweis des Satzes.

Literaturhinweise:

Das Thema ist enthalten im Buch [LM89]. Das Buch enthält viel mehr, deshalb steht hier ein Übersicht mit relevanten Teilen. Im Kapitel I sind die relevante Sektionen die folgende: §1, §3 bis vor 3.3, §4, §5 bis vor 5.8, §7.

Die eigentliche Aufgabe ist Proposition 7.1. und Theorem 7.2

Wichtige Resultate auf dem Weg sind 4.1, 4.3, 5.6, 5.7

Das Buch [Por95] ist ein etwas elementares Buch über Clifforalgebren, das auch viele Beispiele enthält. Allerdings sind die Darstellungstheorie und das Hauptersultat nicht enthalten.

Date: December 1, 2013.

References

[LM89] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[Por95] Ian R. Porteous. *Clifford algebras and the classical groups*, volume 50 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.