BACHELORARBEITTHEMA: SIGNATUR

TIBOR MACKO

Definition 0.1. *Sei* $B : V \times V \to \mathbb{R}$ *eine nicht-ausgeartete symmetrische bilineare Form auf einem endlich-dimensionalem* $\mathbb{R}$*-Vektorraum* V*. Bezüglich einer geigneter Basis ist dessen Matrix diagonal, mit Elementen nur* $+1$ *oder* -1 *auf der Diagonale. Definiere:*

$$\mathrm{sign}(B) := \text{Anzahl } \{+1\} - \text{Anzahl } \{-1\}$$

Definition 0.2. *Sei* M^{4k} *eine orientierte* $4k$*-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit. Betrachte die Schnittform*

$$S : H_{2k}(M;\mathbb{R}) \otimes H_{2k}(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad S(x,y) = \langle D(x) \cup D(y), [M] \rangle,$$

die nicht-ausgeartet symmetrisch bilinear ist. Hier $D : H_{2k}(M;\mathbb{R}) \to H^{2k}(M;\mathbb{R})$ *ist die Inverse der Poincaré Dualität,* $[M] \in H_{4k}(M;\mathbb{R})$ *bezeichnet die Fundamentalklasse von* M *und* $\langle -,- \rangle : H^{4k}(M;\mathbb{R}) \otimes H_{4k}(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *bezeichnet das Kroneker Produkt. Definiere:*

$$\mathrm{sign}(M) := \mathrm{sign}(B)$$

Example 0.3.

$$\mathrm{sign}(\mathbb{C}P^{2k}) = 1.$$

Die Signatur ist eine wichtige Invariante von Mannigfaltigkeiten. Ziel der Arbeit ist einige Eigenschaften der Signatur zu beweisen.

Theorem 0.4. *Es gilt:*

- *Sei* $M = \partial W$*. Dann ist* $\mathrm{sign}(M) = 0$*.*
- $$sign(M \times N) = \mathrm{sign}(M) \cdot \mathrm{sign}(N)$$

Man kann die Signatur auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand definieren [AS68, Section 7], [Kir89, Chapter 2].

Theorem 0.5 (Novikov)**.** *Seien* $(M, \partial M)$ *und* $(N, \partial N)$ *zwei* $4k$*-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten mit Rand. Sei* $f : \partial M \to \partial N$ *ein Homöomorphismus mit der Eigenschaft* $f_*[\partial M] = -[\partial N]$*. Es gilt:*

$$\mathrm{sign}(M \cup_f N) = \mathrm{sign}(M) + \mathrm{sign}(N)$$

Literaturhinweise:

Produkt Struktur auf Kohomologie, Poincaré Dualität, Schnittform: [Bre97], [LÖ5]

Rand Eigenschaft: [LÖ5].

Produkt: [Sto68], Seiten: 220-222.

Novikov-Additivität: [Kir89, Chapter II] und [AS68, Section 7].

Date: December 14, 2014.

References

[AS68] Michael F. Atiyah and Isadore M. Singer. The index of elliptic operators. III. *Ann. of Math. (2)*, 87:546–604, 1968.

[Bre97] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.

[Kir89] Robion C. Kirby. *The topology of* 4*-manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[LÖ5] Wolfgang Lück. *Algebraic topology. Homology and manifolds*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, 2005.

[Sto68] Robert E. Stong. *Notes on cobordism theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.