Matematický ústav
Slovenská akadémia vied

Andrea Zemánková

ŠTRUKTÚRA UNINORIEM SO SPOJITÝMI PRIDRUŽENÝMI T-NORMAMI A T-KONORMAMI A ICH ZOVŠEOBECNENIA

Vedný odbor: 010108: Pravdepodobnosť a matematická štatistika

Autoreferát dizertačnej práce na získanie vedeckej hodnosti doktora matematických vied

MÚ SAV Bratislava, apríl 2021

Dizertácia bola vypracovaná v rámci vedeckovýskumnej činnosti pri riešení projektov APVV 0073-10, APVV-0178-11, APVV-16-0073, projektov VEGA 2/0049/14, VEGA 1/0006/19 a programu *Štipendum SAV* na Matematickom ústave SAV.

Uchádzač: **Mgr. Andrea Zemánková, PhD.**
Matematický ústav SAV

Oponenti:

Stanovisko k dizertácii vypracoval Matematický ústav SAV v Bratislave.

Autoreferát bol rozoslaný dňa:

Obhajoba sa koná dňa pred komisiou pre obhajoby doktorských dizertácií 010108: Pravdepodobnosť a matematická štatistika

na Matematickom ústave SAV, Štefánikova 49, Bratislava

S dizertáciou sa možno oboznámiť

- na sekretariáte MÚ SAV
- na stránke `http://www.mat.savba.sk/~zemankova`

Predseda komisie pre obhajoby vo vednom odbore:

prof. RNDr. Anatolij Dvurečenskij, DrSc.
Matematický ústav SAV
Predseda ad hoc komisie pre obhajoby
doktorských dizertačných prác

Obsah

1 Úvod

Teória pravdepodobnosti a klasická teória miery sú založené na sigma-aditivite, ktorá je prirodzenou vlastnosťou ohodnotenia väčšiny prírodovedných pojmov, napríklad objemov a im príbuzných veličín. Humanitné vedy, ekonomické vedy a im príbuzné oblasti kladú dôraz na interakciu, ktorá sa (sigma-)aditivitou modelovať nedá, a tak nutne vyžaduje rôzne zovšeobecnenia pravdepodobnosti (miery) a im zodpovedajúcich stredných hodnôt (integrálov). Zatiaľ čo štandardné stredné hodnoty sú založené na štandardnom násobení (čo je vynútené distributívnosťou vzhľadom na aditivitu, ktorá je potrebná pre správnu definíciu Lebesgueovho-Stieltjesovho integrálu), toto už viac neplatí keď je (sigma-)aditivita mier zoslabená, alebo modifikovaná. Preto je pre rozvoj zovšeobecnenej teórie pravdepodobnosti dôležité štúdium integrálov založených na komutatívnych asociatívnych funkciách na jednotkovom intervale.

Zavedenie štatistických metrických priestorov (v súčasnosti sa volajú probabilistické metrické priestory) Mengerom [28] v roku 1942 a skúmanie príbuzných konceptov prinieslo hlboké poznatky o triangulárnych normách a s nimi súvisiacich funkciách na jednotkovom intervale. Predovšetkým komutatívne a asociatívne binárne funkcie na jednotkovom intervale, vrátane t-noriem, t-konoriem, uninoriem, nullnoriem a ďalších špeciálnych funkcií, boli študované a aplikované v mnohých teoretických a aplikačných oblastiach, napríklad v oblasti pravdepodobnosti, štatistiky, viac-hodnotovej logiky, teórie rozhodovania, umelej inteligencie, neurálnych sietí, spracovaní obrazu, fúzii dát, ale aj v ekonomike, sociálnych vedách a mnohých ďalších.

Vďaka asociativite možno t-normy vnímať ako špeciálne pologrupy na jednotkovom intervale (špeciálne topologické pologrupy nazývané I-semigroups v spojitom prípade) alebo okruhové operácie. Za predpokladu 2-monotónnosti (n-monotónnosti), s neutrálnym prvkom 1, dostaneme binárne (n-árne) kopule, ktoré slúžia ako nástroj na modelovanie stochastickej závislosti náhodných vektorov, t.j. modelujú spojenie medzi 1-rozmernými marginálnymi distribučnými funkciami a združenou distribučnou funkciou.

Aj keď sa väčšina aplikácií zameriava na spojité t-normy a ich duálne t-konormy, kvôli ich jednoduchej štruktúre, veľmi rýchlo sa prišlo na to, že vypustenie, alebo nahradenie niektorých vlastností môže zlepšiť presnosť modelu v reálnych aplikáciách. Toto pozorovanie viedlo k rôznym zovšeobecneniam ako sú napríklad nespojité t-normy, semi t-operátory, pseudo-t-normy, kvázi-kopule, semikopule, overlap funkcie a mnohé ďalšie. Zovšeobecnenia monotónnosti viedli k zavedeniu smerovej a slabej monotónnosti a zovšeobecnenie definičného oboru, t.j., jednotkového intervalu, ktorý tvorí ohraničenú reťaz, všeobecnejšími štruktúrami viedlo k zavedeniu t-noriem na ohraničených čiastočne usporiadaných množinách a na ohraničených zväzoch.

Zovšeobecnenie pozície neutrálneho prvku, alebo anihilátora t-normy viedlo k definícii uninoriem a nullnoriem [5, 40]. Keďže sa tieto funkcie správajú inak pod a nad neutrálnym prvkom (anihilátorom) rýchlo sa zistilo, že môžu byť využité v bipolárnej agregácii, alebo bipolárnej viac-hodnotovej logike [41]. Uninormy a nullnormy sa tiež dajú chápať ako bipolárne t-normy a t-konormy [30]. Z algebraického pohľadu sú uninormy s neutrálnym prvkom vo vnútri jednotkového intervalu jediné binárne operácie $*$ na $[0,1]$ pre ktoré sa štruktúry $([0,1], \max, *)$ a $([0,1], \min, *)$ stávajú distributívnymi komutatívnymi polookruhmi (pozri [12]).

Nedávno Prabhakar Akella [1] zaviedol pojem, ktorý spája uninormy a nullnormy – n-uninormy. Tento koncept zovšeobecňuje uninormy tak, že globálny neutrálny prvok sa nahradí n lokálnymi neutrálnymi prvkami. Navyše, n-uninormy by sme mohli prirovnať k ordinálnym súčtom t-noriem (t-konoriem), kde sa na rôznych podoblastiach jednotkového štvorca aplikujú rôzne t-normy. Rovnako v prípade n-uninoriem sa na rôznych podoblastiach jednotkového štvorca aplikujú rôzne uninormy. Podobne môžeme n-uninormy prirovnať aj k myšlienke k-árnych kapacít, zavedených v [13], ktoré sú založené na referenčných úrovniach (kategóriách) pre vstupy.

Ako sme uviedli vyššie, nami skúmané operácie prispievajú k rozvoju zovšeobecnenej teórie pravdepodobnosti, kde pri zoslabovaní či modifikovaní vlastností pravdepodobnosti potrebujeme zaviesť integrály založene práve na operáciách skúmaných v tejto doktorskej dizertačnej práci. Prvé takéto prístupy boli navrhnuté a skúmané napríklad v [31, 37]. Integrály založené priamo na uninormách boli navrhnuté napríklad v [19].

2 Štruktúra a ciele práce

Práca pozostáva z jedenástich publikovaných článkov, pozri kapitolu 6 pre úplný zoznam. Články sú rozdelené do dvoch kapitol. Prvá kapitola sa zaoberá uninormami so spojitými pridruženými funkciami a druhá n-uninormami so spojitými pridruženými funkciami. Práca je zameraná na tieto konkrétne ciele:

- Definovať ordinálny súčet uninoriem.
- Popísať pologrupy, z ktorých sa dá skonštruovať uninorma pomocou ordinálneho súčtu.
- Ukázať, že idempotentné uninormy zodpovedajú špeciálnym lineárnym usporiadaniam na jednotkovom intervale.
- Definovať charakterizujúcu multi-funkciu pre uninormy so spojitými pridruženými funkciami a ukázať jej vzťah s množinou bodov nespojitosti takejto uninormy.
- Ukázať, že každá uninorma so spojitými pridruženými funkciami sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp odvodených od spojitých Archimedovských t-noriem, t-konoriem, reprezentovateľných uninoriem a idempotentných pologrúp.
- Definovať z-ordinálny súčet pre čiastočne usporiadané množiny pologrúp.
- Ukázať, že idempotentné n-uninormy zodpovedajú špeciálnym čiastočným usporiadaniam na jednotkovom intervale.

- Definovať charakterizujúce funkcie pre n-uninormy so spojitými pridruženými funkciami a ukázať ich vzťah s množinou bodov nespojitosti takejto n-uninormy.

- Ukázať, že každá n-uninorma so spojitými pridruženými funkciami sa dá vyjadriť ako z-ordinálny súčet pologrúp odvodených od spojitých Archimedovských t-noriem, t-konoriem, reprezentovateľných uninoriem a idempotentných pologrúp.

3 Základné pojmy a stručný popis skúmanej problematiky

Triangulárna norma ([28, 36]) je binárna funkcia $T\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, ktorá je komutatívna, asociatívna, neklesajúca v obidvoch súradniciach a má neutrálny prvok 1. Vďaka asociativite je n-árna forma každej t-normy jednoznačne daná a tak môžeme danú t-normu brať ako agregačnú funkciu definovanú na $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n$ (pozri [14]). Duálnymi funkciami k t-normám sú t-konormy. Triangulárna konorma je binárna funkcia $S\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, ktorá je komutatívna, asociatívna, neklesajúca v obidvoch súradniciach a má neutrálny prvok 0.

Ordinálne súčty t-noriem, t-konoriem, uninoriem, ako aj konštrukcia pomocou z-ordinálneho súčtu, ktorú zavedieme v tejto práci, sú založené na ordinálnom súčte pologrúp zavedenom Cliffordom v [6]. V nasledovnej vete uvádzame tento výsledok tak, ako bol formulovaný v [18].

Veta 3.1
Nech $A \neq \emptyset$ je úplne usporiadaná množina a $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ s $G_\alpha = (X_\alpha, *_\alpha)$ nech je množina pologrúp. Predpokladajme, že pre všetky $\alpha, \beta \in A$ s $\alpha < \beta$ sú množiny X_α a X_β buď disjunktné, alebo $X_\alpha \cap X_\beta = \{x_{\alpha,\beta}\}$, kde $x_{\alpha,\beta}$ je zároveň neutrálny prvok G_α a anihilátor G_β a kde pre každé $\gamma \in A$ s $\alpha < \gamma < \beta$ platí $X_\gamma = \{x_{\alpha,\beta}\}$. Ak definujeme $X = \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ a binárnu operáciu $*$ na X ako

$$x * y = \begin{cases} x *_\alpha y & \text{ak } (x,y) \in X_\alpha \times X_\alpha, \\ x & \text{ak } (x,y) \in X_\alpha \times X_\beta \text{ a } \alpha < \beta, \\ y & \text{ak } (x,y) \in X_\alpha \times X_\beta \text{ a } \alpha > \beta, \end{cases}$$

potom je $G = (X, *)$ pologrupa. Pologrupa G je komutatívna vtedy a len vtedy ak pre každé $\alpha \in A$ je pologrupa G_α komutatívna.

Ordinálny súčet t-noriem je potom daný nasledovne (pozri [23]).

Tvrdenie 3.2
Nech K je konečná, alebo spočítateľne nekonečná indexová množina a nech $(]a_k, b_k[)_{k\in K}$ je systém otvorených, disjunktných podintervalov $[0,1]$. Nech $(T_k)_{k\in K}$ je systém t-noriem.

Potom ordinálny súčet $T = (\langle a_k, b_k, T_k\rangle \mid k \in K)$ *daný vzťahom*

$$T(x,y) = \begin{cases} a_k + (b_k - a_k)T_k(\frac{x-a_k}{b_k-a_k}, \frac{y-a_k}{b_k-a_k}) & \textit{ak } (x,y) \in [a_k, b_k[^2, \\ \min(x,y) & \textit{inak} \end{cases}$$

je t-norma. T-norma T *je spojitá vtedy a len vtedy ak všetky t-normy* T_k *pre* $k \in K$ *sú spojité.*

Ordinálne súčty t-konoriem vyzerajú podobne, v ich prípade je ale minimum nahradené maximom.

Charakterizácia všetkých spojitých t-noriem (t-konoriem) je založená na dvoch konštrukciách. Prvý výsledok hovorí, že každá spojitá t-norma (t-konorma) sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet spojitých Archimedovských t-noriem (t-konoriem) (pozri [23]). Poznamenajme, že spojitá t-norma (t-konorma) je Archimedovská vtedy a len vtedy ak má iba triviálne idempotentné prvky 0 a 1. Druhý výsledok nám hovorí, že každá Archimedovská t-norma (t-konorma) sa dá reprezentovať pomocou spojitého aditívneho generátora.

Tvrdenie 3.3
Nech $t\colon [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ *je spojitá, ostro klesajúca funkcia s* $t(1) = 0$*. Potom binárna funkcia* $T\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *definovaná ako*

$$T(x,y) = t^{-1}(\min(t(0), t(x) + t(y)))$$

je spojitá Archimedovská t-norma. Funkcia t *sa nazýva aditívny generátor t-normy* T*.*

Podobne, aditívny generátor spojitej t-konormy S je spojitá, ostro rastúca funkcia $s\colon [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ kde $s(0) = 0$. Aditívny generátor spojitej Archimedovskej t-normy (t-konormy) je jednoznačne určený až na kladnú multiplikatívnu konštantu.

Spojitá Archimedovská t-norma T (t-konorma S) je buď striktná, t.j. ostro rastúca na $]0,1]^2$ (na $[0,1[^2$), alebo nilpotentná, t.j. existuje $(x,y) \in]0,1[^2$ také, že $T(x,y) = 0$ ($S(x,y) = 1$).

Triangulárna subnorma (pozri [16]) je binárna funkcia $M\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, ktorá je komutatívna, asociatívna, neklesajúca v oboch súradniciach a je zhora ohraničená minimom, t.j. $M(x,y) \leq \min(x,y)$ pre všetky $x,y \in [0,1]$. Evidentne, každá t-norma je zároveň aj t-subnorma. Duálna operácia k t-subnorme je t-superkonorma, čo je binárna funkcia $R\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, ktorá je komutatívna, asociatívna, neklesajúca v oboch súradniciach a je zdola ohraničená maximom, t.j. $R(x,y) \geq \max(x,y)$ pre všetky $x,y \in [0,1]$.

Históriu t-noriem (t-konoriem, t-subnoriem), prehľad ich vlastností, ich prepojenie s ďalšími typmi agregačných funkcií, základné aplikácie, príslušnú literatúru, ako aj mnoho ďalších výsledkov je možné nájsť v dvoch monografiách [3, 18].

Zovšeobecenie umiestenia neutrálneho prvku t-normy (t-konormy) viedlo k zavedeniu uninoriem v [40]. Uninorma je binárna funkcia $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, ktorá je komutatívna, asociatívna, neklesajúca v oboch súradniciach a má neutrálny prvok $e \in]0,1[$ (pozri aj [10]). Ak zoberieme uninormu z širšom zmysle, t.j. ak pre neutrálny prvok platí $e \in [0,1]$, potom trieda uninoriem pokrýva aj triedu t-noriem a t-konoriem. Pre každú uninormu je hodnota $U(1,0) \in \{0,1\}$ jej anihilátorom. Uninormu nazývajme konjunktívna (disjunktívna) ak $U(1,0)=0$ ($U(1,0)=1$).

Pre každú uninormu U s neutrálnym prvkom $e \in \,]0,1[\,$, je zúženie U na $[0,e]^2$ t-normou na $[0,e]^2$, t.j. lineárnou transformáciou nejakej t-normy T_U definovanej na $[0,1]^2$, a zúženie U na $[e,1]^2$ je t-konorma na $[e,1]^2$, t.j. lineárna transformácia nejakej t-konormy S_U. T-norma T_U a t-konorma S_U sa nazývajú pridružené funkcie uninormy U. V prípade ak pre uninormu máme $e=1$ ($e=0$) tak sa pridružená t-norma (t-konorma) rovná U a pridružená t-konorma (t-norma) je degenerovaná na triviálnu binárnu operáciu na bode 1 (0). Množinu všetkých uninoriem so spojitými pridruženými funkciami označíme symbolom $\mathcal{U}$.

Pre každú uninormu U jej monotónnosť implikuje $\min(x,y) \leq U(x,y) \leq \max(x,y)$ pre všetky $(x,y) \in [0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$.

Uninorma $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sa nazýva

- internálna ak $U(x,y) \in \{x,y\}$ pre všetky $(x,y) \in [0,1]^2$,
- d-internálna ak je internálna a existuje spojitá, ostro klesajúca funkcia $g_U\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ taká, že $U(x,y)=\min(x,y)$ ak $y<g_U(x)$ a $U(x,y)=\max(x,y)$ ak $y>g_U(x)$,
- lokálne internálna na $A(e)$ ak U je internálna na $A(e)=[0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$,
- idempotentná ak $U(x,x)=x$ pre všetky $x \in [0,1]$.

Poznamenajme, že uninorma je internálna vtedy a len vtedy ak je idempotentná.

Množina idempotentných uninoriem bola charakterizovaná v [34].

Veta 3.4
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je binárna funkcia. Potom U je idempotentná uninorma s neutrálnym prvkom $e \in \,]0,1[$ vtedy a len vtedy ak existuje nerastúca funkcia $g\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, ktorá je Id-symetrická, s $g(e)=e$, taká, že

$$U(x,y)=\begin{cases}\min(x,y) & \textit{ak } y<g(x) \textit{ alebo } (y=g(x) \textit{ a } x<g(g(x))),\\ \max(x,y) & \textit{ak } y>g(x) \textit{ alebo } (y=g(x) \textit{ a } x>g(g(x))),\\ x \textit{ alebo } y & \textit{ak } y=g(x) \textit{ a } x=g(g(x))\end{cases}$$

a U je komutatívna v bodoch (x,y) takých, že $y=g(x)$ a $x=g(g(x))$.

Viacero výsledkov o internálnych a lokálne internálnych uninormách sa dá nájsť v [4, 7, 9, 26, 34].

Podobne ako v prípade t-noriem a t-konoriem, dajú sa uninormy konštruovať pomocou aditívnych generátorov (pozri [10]).

Tvrdenie 3.5
Nech $f\colon [0,1] \longrightarrow [-\infty,\infty]$, $f(0)=-\infty$, $f(1)=\infty$ je spojitá, ostro rastúca funkcia. Potom je binárna funkcia $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, daná vzťahom

$$U(x,y)=f^{-1}(f(x)+f(y)),$$

kde $f^{-1}\colon [-\infty,\infty] \longrightarrow [0,1]$ *je inverzná funkcia k* f*, s konvenciou* $\infty + (-\infty) = \infty$ ($\infty + (-\infty) = -\infty$)*, uninormou, ktorú budeme nazývať reprezentovateľná. Jediný bod* $e \in]0,1[$*, kde* $f(e) = 0$ *je potom neutrálnym prvkom* U*.*

V [33] (pozri tiež [30]) môžeme nájsť úplnú charakterizáciu triedy reprezentovateľných uninoriem.

Tvrdenie 3.6
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je uninorma. Potom* U *je reprezentovateľná vtedy a len vtedy ak je spojitá na* $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$*.*

Doterajšie výsledky o uninormách so spojitými pridruženými funkciami zahŕňajú charakterizáciu uninoriem so spojitými Archimedovskými pridruženými funkciami (pozri [11, 21, 24, 32] a [35] pre diskrétny prípad), uninormy s pridruženými funkciami, ktoré sa dajú vyjadriť pomocou (netriviálneho) ordinálneho súčtu (pozri [8]) a uninormy so spojitými pridruženými funkciami, ktoré sú lokálne internálne na $A(e)$ (pozri [9]).

Ak zovšeobecníme umiestnenie anihilátora t-normy (t-konormy) dostávame sa k nullnormám [5]. Poznamenajme, že t-operátory boli nezávisle definované v [25] a v [27] bolo ukázané, že t-operátory a nullnormy sa zhodujú.

Binárna funkcia $V\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sa nazýva nullnorma ak je komutatívna, asociatívna, neklesajúca v oboch súradniciach a existuje také $z \in [0,1]$, že $V(0,x) = x$ pre všetky $x \le z$ a $V(1,x) = x$ pre všetky $x \ge z$. Monotónnosť potom implikuje, že z je anihilátor V.

Ak $z = 0$ ($z = 1$) potom je V t-norma (t-konorma). Každá nullnorma so $z \in]0,1[$ je na $[0,z]^2$ lineárnou transformáciou nejakej t-konormy a na $[z,1]^2$ lineárnou transformáciou nejakej t-normy. Zároveň $V(x,y) = V(y,x) = z$ pre všetky $x \in [0,z]$ a $y \in [z,1]$ (pozri [5]).

Ďalším zovšeobecnením, ktoré spája uninormy a nullnormy, sú n-uninormy, ktoré zaviedol Akella v [1].

Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a nech $V\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je komutatívna binárna funkcia. Potom $\{e_1,\dots,e_n\}_{z_1,\dots,z_{n-1}}$ sa nazýva n-neutrálny prvok V ak pre $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = 1$ a $e_i \in [z_{i-1}, z_i]$, pre $i = 1,\dots,n$ platí $V(e_i,x) = x$ pre všetky $x \in [z_{i-1}, z_i]$.

Binárna funkcia $U^n\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sa nazýva n-uninorma ak je komutatívna, asociatívna, neklesajúca v oboch súradniciach a má n-neutrálny prvok $\{e_1,\dots,e_n\}_{z_1,\dots,z_{n-1}}$. Označenie U^n bolo pre n-uninormy zavedené v [1] a preto si musíme dávať pozor, aby sme ho nezamieňali s n-tou mocninou uninormy U.

Základnú štruktúru n-uninoriem popísal už Akella v [1, 2] a charakterizáciu piatich hlavných tried 2-uninoriem možno nájsť v [42].

Každá n-uninorma má okolo hlavnej diagonály nasledovné funkcie.

Tvrdenie 3.7
Nech $U^n\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je* n*-uninorma a nech* $\{e_1,\dots,e_n\}_{z_1,\dots,z_{n-1}}$ *je jej* n*-neutrálny prvok. Potom*

(i) *Zúženie* U^n *na* $[z_{i-1}, e_i]^2$ *, pre* $i = 1, \ldots, n$*, je lineárna transformácia nejakej t-normy. Túto t-normu budeme označovať ako* T_i*.*

(ii) *Zúženie* U^n *na* $[e_i, z_i]^2$ *pre* $i = 1, \ldots, n$*, je lineárna transformácia nejakej t-konormy. Túto t-konormu budeme označovať ako* S_i*.*

(iii) *Zúženie* U^n *na* $[z_{i-1}, z_i]^2$ *pre* $i = 1, \ldots, n$*, je lineárna transformácia nejakej uninormy. Túto uninormu budeme označovať* U_i*.*

(iv) *Zúženie* U^n *na* $[z_i, z_j]^2$ *pre* $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$*,* $i < j$*, je lineárna transformácia nejakej* $(j-i)$*-uninormy.*

Navyše, zúženie U^n na $[e_i, e_{i+1}]^2$ pre $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, je lineárna transformácia nejakej nullnormy. Z predchádzajúceho vidíme, že štandardnú uninormu môžeme tiež chápať ako 1-uninormu.

Pre $n \in \mathbb{N}$ označíme množinu všetkých n-uninoriem so spojitými pridruženými t-normami $T_1, \ldots, T_n$ a t-konormami $S_1, \ldots, S_n$ symbolom $\mathcal{U}_n$.

V závere ešte pripomeňme, že ak pre 2-uninormu máme $e_2 = 1$ dostaneme takzvanú uni-nullnormu, a ak $e_1 = 0$ dostaneme takzvanú null-uninormu [38].

Našim cieľom je charakterizácia n-uninoriem z $\mathcal{U}_n$. Prvým výsledkom v tomto smere bola charakterizácia uni-nullnoriem so spojitými Archimedovskými pridruženými funkciami z [39].

Poznamenajme ešte, že ak budeme hovoriť o usporiadaní na nejakej podmnožine jednotkového intervalu, tak tým budeme vždy rozumieť štandardné usporiadanie (v prípade ak toto usporiadanie nebude inak špecifikované).

4 Hlavné výsledky práce

4.1 Uninormy so spojitými pridruženými funkciami

Ako sme videli v predchádzajúcej časti, na kompletnú charakterizáciu spojitých t-noriem (t-konoriem) potrebujeme iba dve konštrukčné metódy. Je to konštrukcia pomocou ordinálnych súčtov a konštrukcia pomocou aditívneho generátora. Koncept aditívneho generátora sa dal jednoducho zaviesť aj pre uninormy a vedie k reprezentovateľným uninormám. Na druhej strane zovšeobecnenie ordinálneho súčtu pre uninormy nebolo také očividné. Predchádzajúce výsledky sa zameriavali len na uninormy, ktorých pridružené funkcie boli skonštruované pomocou ordinálnych súčtov, ale nie na ordinálny súčet samotných uninoriem. V nasledovnom texte budeme v prípade asociatívnej funkcie na danej množine voľne zamieňať pojmy funkcia a pologrupa, nakoľko je pre binárnu asociatívnu funkciu F na množine X pologrupa (X, F) jednoznačne daná.

4.1.1 Zovšeobecnené uninormy

V [20] bolo ukázané, že najvšeobecnejšími pologrupami, pomocou ktorých sa dá skonštruovať t-norma, pomocou ordinálneho súčtu, sú t-subnormy. Podobnou analýzou sme ukázali, že okrem t-subnoriem, t-superkonoriem a triviálnych pologrúp existujú ešte štyri druhy pologrúp, z ktorých sa dá skonštruovat uninorma pomocou ordinálneho súčtu. Nakoľko uninorma sa správa ako t-norma (t-konorma) na vstupoch menších (väčších) ako neutrálny prvok, takáto pologrupa sa musí správať ako t-subnorma (t-superkonorma) na vstupoch menších (väčších) ako neutrálny prvok danej uninormy. Ako vidíme, tieto pologrupy sú vždy definované na dvoch intervaloch, kde jeden obsahuje body menšie ako neutrálny prvok a druhý obsahuje body väčšie ako neutrálny prvok danej uninormy.

Definícia 4.1
Komutatívna, asociatívna binárna funkcia $GU\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, ktorá je neklesajúca v oboch súradniciach sa nazýva

(i) zovšeobecnená sub-uninorma ak existuje $e \in [0,1]$ také, že $GU(x,y) \leq \min(x,y)$ pre všetky $(x,y) \in [0,e]^2$, $GU(x,y) \geq \max(x,y)$ pre všetky $(x,y) \in \,]e,1]^2$, $GU(x,y) \in [x,y]$ pre všetky $(x,y) \in [0,e] \times \,]e,1] \cup \,]e,1] \times [0,e]$.

(ii) zovšeobecnená super-uninorma ak existuje $e \in [0,1]$ také, že $GU(x,y) \leq \min(x,y)$ pre všetky $(x,y) \in [0,e[^2$, $GU(x,y) \geq \max(x,y)$ pre všetky $(x,y) \in [e,1]^2$, $GU(x,y) \in [x,y]$ pre všetky $(x,y) \in [0,e[\, \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e[$.

Dá sa jednoducho vidieť, že zovšeobecnené sub-uninormy a zovšeobecnené super-uninormy sa líšia iba na množine $\{e\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{e\}$.

Definícia 4.2
Binárna funkcia $GU\colon ([a,b] \cup [c,d])^2 \longrightarrow ([a,b] \cup [c,d])$, kde $a < b < c < d$, $a,b,c,d \in [0,1]$ sa nazýva zovšeobecnená kompozitná uninorma ak je komutatívna, asociatívna, neklesajúca v oboch súradniciach a zúženie GU na $[a,b]^2$ je t-subnorma (na $[a,b]^2$), zúženie GU na $[c,d]^2$ je t-superkonorma (na $[c,d]^2$) a $GU(x,y) \in [x,y]$ pre všetky $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ a všetky $(x,y) \in [c,d] \times [a,b]$.

Štvrtým druhom pologrúp, ktoré vedú k uninormám pomocou ordinálneho súčtu sú potom uninormy samotné. Samozrejme, keď chceme konštruovať uninormy pomocou vyššie definovaných pologrúp (okrem zovšeobecnených kompozitných uninoriem), musíme použiť transformáciu, ktorá nám prevedie danú funkciu z intervalu $[0,1]$ na množinu $[a,b[\, \cup \{v\} \cup \,]c,d]$, pre nejaké vhodné $v \in [b,c]$. Preto budeme používať nasledovnú transformáciu.

Pre ľubovoľné $0 \leq a < b \leq c < d \leq 1$, $v \in [b,c]$ a bod $e \in \,]0,1[$ definujeme funkciu $f\colon [0,1] \longrightarrow [a,b[\, \cup \{v\} \cup \,]c,d]$, vzťahom

$$f(x) = \begin{cases} (b-a) \cdot \frac{x}{e} + a & \text{ak } x \in [0,e[\,, \\ v & \text{ak } x = e, \\ d - \frac{(1-x)(d-c)}{(1-e)} & \text{inak.} \end{cases} \tag{1}$$

Potom f je lineárna na $[0,e[$ ako aj na $]e,1]$ a teda je to po častiach lineárna bijekcia z $[0,1]$ do $([a,b[\, \cup \{v\} \cup \,]c,d])$. Nech $GU\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je binárna funkcia. Pomocou f môžeme definovať binárnu funkciu $GU_v^{a,b,c,d}\colon ([a,b[\, \cup \{v\} \cup \,]c,d])^2 \longrightarrow ([a,b[\, \cup \{v\} \cup \,]c,d])$ ako

$$GU_v^{a,b,c,d}(x,y) = f(GU(f^{-1}(x), f^{-1}(y))). \tag{2}$$

Podobne, pomocou inverznej funkcie f^{-1} môžeme transformovať binárnu funkciu definovanú na $([a,b[\cup\{v\}\cup]c,d])^2$ na binárnu funkciu definovanú na $[0,1]^2$. Keďže f je rastúca bijekcia, zachováva komutativitu, asociativitu, aj monotónnosť. Navyše, ak e je neutrálny prvok GU potom v je neutrálny prvok $GU_v^{a,b,c,d}$. To znamená, že ak je GU uninorma na $[0,1]^2$ potom $GU_v^{a,b,c,d}$ je komutatívna, asociatívna, funkcia na $([a,b[\cup\{v\}\cup]c,d])^2$, neklesajúca v oboch súradniciach, a v je jej neutrálny prvok. V takomto prípade budeme hovoriť, že $GU_v^{a,b,c,d}$ je uninorma na $([a,b[\cup\{v\}\cup]c,d])^2$. Poznamenajme, že ak $b=c=v$ potom je f spojitá, po častiach lineárna transformácia z $[0,1]$ na $[a,d]$ taká, že $f(e)=v$.

Podobne môžeme transformovať aj zovšeobecnené sub-uninormy (super-uninormy).

Týmto sme popísali všetky pologrupy, z ktorých sa dajú konštruovať uninormy pomocou ordinálneho súčtu. V našej práci sa ale zameriavame hlavne na uninormy so spojitými pridruženými funkciami, ktoré sú nutne spojité na diagonálne $d\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $d(x)=U(x,x)$. V takomto prípade sa tieto pologrupy na vstupoch menších (väčších) ako neutrálny prvok správajú ako t-norma (t-konorma). Preto sme sa v prvej časti zamerali na ordinálny súčet uninoriem (vrátane t-noriem, t-konoriem a triviálnych pologrúp).

4.1.2 Ordinálny súčet uninoriem

V prípade ordinálneho súčtu uninoriem sú pologrupy definované na množine $([a_k,b_k[\cup\{v_k\}\cup]c_k,d_k])^2$. Aby bola výsledná operácia U asociatívna musí byť v_k anihilátorom zúženia U na $[b_k,c_k]^2$. Kvôli monotónnosti potom platí $U(b_k,c_k)=v_k$.

Ak pre nejaké $k\in K$ máme $a_k=b_k$ ($c_k=d_k$), zodpovedá daný sčítanec t-konorme S_k (t-norme T_k). V tomto prípade sa zúženie t-konormy S_k (t-normy T_k) na $]0,1]^2$ ($[0,1[^2$) lineárne transformuje na $]c_k,d_k]^2$ ($[a_k,b_k[^2$) a neutálny prvok 0 (1) sa transformuje na neutrálny prvok v_k. Ľahko sa dá vidieť, že bod v_k môžeme z takéhoto sčítanca bez problémov vynechať a výslednú uninormu to neovplyvní.

Príklad 4.3

- Nech U_1 a U_2 sú dve uninormy s neutrálnymi prvkami z $]0,1[$ a nech $e\in\,]0,1[$. Nech $a,b\in[0,1]$ sú dva body také, že $0<a<e<b<1$. Potom ordinálny súčet pologrúp G_1 a G_2, kde G_1 zodpovedá uninorme U_1 na $[a,b]^2$, t.j $G_1=([a,b],(U_1)_e^{a,e,e,b})$ a G_2 zodpovedá uninorme U_2 na $([0,a[\cup\{v\}\cup]b,1])^2$, t.j. $G_2=([0,a[\cup\{v\}\cup]b,1],(U_2)_v^{0,a,b,1})$ je uninormou s neutrálnym prvkom e vtedy a len vtedy ak $2<1$ a $v=(U_1)_e^{a,e,e,b}(a,b)$.

- Nech U je uninorma s neutrálnym prvkom z $]0,1[$, nech T je t-norma a nech $e\in\,]0,1[$. Nech bod $a\in\,]0,e[$. Potom ordinálny súčet pologrúp G_1 a G_2, kde G_1 zodpovedá uninorme U na $[a,1]^2$, t.j. $G_1=([a,1],(U)_e^{a,e,e,1})$ a G_2 zodpovedá t-norme T na $([0,a[\cup\{v\}\cup]1,1])^2$, t.j. $G_2=([0,a[\cup\{v\},(T)_v^{0,a,1,1})$, je uninormou s neutrálnym prvkom e vtedy a len vtedy ak $2<1$ a $v=(U)_e^{a,e,e,1}(a,1)$.

  Poznamenajme, že v môžeme z pologrupy G_2 vynechať a preto stačí brať $G_2=([0,a[,T^*)$, kde T^* je lineárna transformácia $T|_{[0,1[^2}$ na $[0,a[^2$.

Ordinálny súčet dvoch uninoriem môžeme rozšíriť na ordinálny súčet spočítateľného počtu uninoriem. Najskôr si definujeme všetko potrebné.

Definícia 4.4
Nech $e \in [0,1]$ a nech K je indexová množina, ktorá je buď konečná, alebo spočítateľne nekonečná. Nech $(]a_k, b_k[)_{k\in K}$ je systém disjunktných otvorených podintervalov (ktoré môžu byť aj prázdne) intervalu $[0,e]$ takých, že $\bigcup_{k\in K}[a_k, b_k] = [0,e]$. Podobne, nech $(]c_k, d_k[)_{k\in K}$ je systém disjunktných otvorených podintervalov (ktoré môžu byť aj prázdne) intervalu $[e,1]$ takých, že $\bigcup_{k\in K}[c_k, d_k] = [e,1]$. Ďalej, nech sú tieto dva systémy antikomonotónne, t.j. $b_k \le a_i$ vtedy a len vtedy ak $c_k \ge d_i$ pre všetky $i,k \in K$. Označíme $K_* = \{k \in K \mid]a_k, b_k[\neq \emptyset\}$ a $K^* = \{k \in K \mid]c_k, d_k[\neq \emptyset\}$. Nech $(U_k)_{k\in K_*\cap K^*}$ je množina uninoriem na $[0,1]^2$, ktoré majú neutrálny prvok v $]0,1[$, nech $(U_k)_{k\in K_*\setminus K^*}$ je množina t-noriem na $[0,1]^2$ a nech $(U_k)_{k\in K^*\setminus K_*}$ je množina t-konoriem na $[0,1]^2$.

Označíme $B_1 = \{b_k \mid k \in K\} \setminus \{a_k \mid k \in K_*\}$ a $C_1 = \{c_k \mid k \in K\} \setminus \{d_k \mid k \in K^*\}$. Keďže K je spočítateľná, každé $b \in B_1\setminus\{e\}$ je hromadným bodom množiny $\{a_k \mid k \in K_*\}$ (a podobne pre $c \in C_1\setminus\{e\}$). Definujeme funkcie $g\colon B_1\setminus\{e\} \longrightarrow [e,1]$, $h\colon C_1\setminus\{e\} \longrightarrow [0,e]$ také, že ak pre $b \in B_1 \setminus \{e\}$ máme $b = \lim\limits_{i\longrightarrow\infty} a_{k_i}$ pre $k_i \in K_*$, potom

$$g(b) = \lim_{i\longrightarrow\infty} d_{k_i}. \tag{3}$$

Podobne ak pre $c \in C_1 \setminus \{e\}$ máme $c = \lim\limits_{i\longrightarrow\infty} d_{k_i}$ pre $k_i \in K^*$, potom

$$h(c) = \lim_{i\longrightarrow\infty} a_{k_i}. \tag{4}$$

Nakoniec označíme $B = \{b \in B_1 \setminus \{e\} \mid g(b) \in C_1 \setminus \{e\}\}$, $C = \{c \in C_1 \setminus \{e\} \mid h(c) \in B_1 \setminus \{e\}\}$.

Ak $g(b) \notin C_1\setminus\{e\}$ pre nejaké $b \in B_1\setminus\{e\}$ ($h(c) \notin B_1\setminus\{e\}$ pre nejaké $c \in C_1\setminus\{e\}$) potom je hodnota $U(b, g(b))$ ($U(c, h(c))$) jasne daná monotónnosťou U. Preto treba špeciálne definovať iba prípady keď $b \in B$, $c \in C$.

Tvrdenie 4.5
Zoberme všetky pojmy zavedené v Definícii 4.4. Ďalej, nech $n\colon B \longrightarrow B\cup C$ je ľubovoľná funkcia taká, že pre $b \in B$ platí

$$n(b) \in \{b, g(b)\}.$$

Potom je ordinálny súčet $U^e = (\langle a_k, b_k, c_k, d_k, U_k\rangle \mid k \in K)^e$ daný nasledovným vzťahom *uninorma:* $U^e(x,y) =$

$$\begin{cases} y & \text{ak } x = e, \\ x & \text{ak } y = e, \\ (U_k)^{a_k,b_k,c_k,d_k}_{v_k}(x,y) & \text{ak } (x,y) \in ([a_k,b_k[\,\cup\,]c_k,d_k])^2, k \in K_* \cap K^*, \\ (U_k)^{a_k,b_k}(x,y) & \text{ak } (x,y) \in ([a_k,b_k[\,\cup\,]c_k,d_k])^2, k \in K_* \setminus K^*, \\ (U_k)^{c_k,d_k}(x,y) & \text{ak } (x,y) \in ([a_k,b_k[\,\cup\,]c_k,d_k])^2, k \in K^* \setminus K_*, \\ x & \text{ak } y \in [b_k,c_k], x \in [a_k,d_k] \setminus [b_k,c_k], k \in K_* \cup K^*, \\ y & \text{ak } x \in [b_k,c_k], y \in [a_k,d_k] \setminus [b_k,c_k], k \in K_* \cup K^*, \\ \min(x,y) & \text{ak } (x,y) \in [b,c]^2 \setminus (]b,c[^2 \cup \{(b,c),(c,b)\}), \\ & \quad \text{kde } b \in B,\ c = g(b),\ x+y < c+b, \\ \max(x,y) & \text{ak } (x,y) \in [b,c]^2 \setminus (]b,c[^2 \cup \{(b,c),(c,b)\}), \\ & \quad \text{kde } b \in B,\ c = g(b),\ x+y > c+b, \\ n(b) & \text{ak } (x,y) = (b,c) \text{ alebo } (x,y) = (c,b),\ b \in B,\ c = g(b), \\ \min(x,y) & \text{ak } (x,y) \in \{b\} \times [b,c] \cup [b,c] \times \{b\} \text{ a} \\ & \qquad b \in B_1 \setminus (B \cup \{e\}), c = g(b), \\ \max(x,y) & \text{ak } (x,y) \in \{c\} \times [b,c] \cup [b,c] \times \{c\} \text{ a} \\ & \qquad c \in C_1 \setminus (C \cup \{e\}), b = h(c), \end{cases}$$

kde $v_k = c_k$ *(*$v_k = b_k$*) ak existuje* $i \in K$ *také, že* $b_k = a_i$, $c_k = d_i$ *a* U_i *je disjunktívna (konjunktívna) uninorma;* $v_k = e$ *ak* $c_k = b_k$*;* $v_k = n(b_k)$ *ak* $b_k \in B$, $v_k = b_k$ *ak* $b_k \in B_1 \setminus (B \cup \{e\})$, $v_k = c_k$ *ak* $c_k \in C_1 \setminus (C \cup \{e\})$*;* $(U_k)^{a_k,b_k,c_k,d_k}_{v_k}$ *je daná vzťahom* (2), $(U_k)^{a_k,b_k}$ *(*$(U_k)^{c_k,d_k}$*) je lineárna transformácia* U_k *na* $[a_k,b_k]^2$ *(*$[c_k,d_k]^2$*).*

4.1.3 Ordinálne súčty reprezentovateľných uninoriem

Pre každú reprezentovateľnú uninormu U s neutrálnym prvkom $e \in]0,1[$ platí, že k ľubovoľnému $x \in]0,1[$ existuje práve jedno $y \in]0,1[$ také, že $U(x,y) = e$. Zároveň, U je spojitá na celom jednotkovom štvorci okrem bodov $(0,1),(1,0)$. Preto vieme definovať spojitú, ostro klesajúcu funkciu $r\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, takú, že jej graf pokrýva všetky body nespojitosti U, t.j., $r(0) = 1$ a $r(1) = 0$, a ak $U(x,y) = e$ pre nejaké $x,y \in]0,1[$ potom $r(x) = y$ a $r(y) = x$. Podobný výsledok sme ukázali aj pre ordinálne súčty reprezentovateľných uninoriem.

Tvrdenie 4.6
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je uninorma. Ak* U *je ordinálny súčet reprezentovateľných uninoriem, t.j. ak* $U = (\langle a_k,b_k,c_k,d_k,U_k\rangle \mid k \in K)$*, pre nejaké vhodné systémy* $(]a_k,b_k[)_{k\in K}$ *a* $(]c_k,d_k[)_{k\in K}$ *kde* $a_k < b_k$ *a* $c_k < d_k$ *pre všetky* $k \in K$ *a* $(U_k)_{k\in K}$ *je množina reprezentovateľných uninoriem, potom existuje spojitá, ostro klesajúca funkcia* $r\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *kde* $r(0) = 1$, $r(e) = e$ *a* $r(1) = 0$ *taká, že* U *je spojitá na* $[0,1] \setminus \{(x,r(x)) \mid x \in [0,1]\}$*.*

Poznamenajme, že U nie je nespojitá na celej množine $\{(x, r(x)) \mid x \in [0,1]\}$. Takýchto funkcií r môže existovať viacero, ale ak pridáme požiadavku, tak ako v prípade reprezentovateľných uninoriem, že ak $U(x,y) = e$ pre nejaké $x, y \in]0,1[$ potom $r(x) = y$ a $r(y) = x$, tak potom je funkcia r určená jednoznačne.

Neskôr ukážeme podobný výsledok aj všeobecne pre uninormy so spojitými pridruženými funkciami (pozri Vetu 4.12). Funkcia r, ktorá spĺňa podmienku $r(x) = y$ a $r(y) = x$ pre všetky $x, y \in]0,1[$ kde $U(x,y) = e$, delí jednotkový štvorec na dve časti: na množinu, kde uninorma dosahuje hodnoty menšie ako neutrálny prvok a na množinu, kde uninorma dosahuje hodnoty väčšie ako neutrálny prvok.

Ďalej označme množinu všetkých uninoriem U takých, že $U(x,0) = 0$ pre všetky $x \in [0,1[$ a $U(x,1) = 1$ pre všetky $x \in]0,1]$ symbolom $\mathcal{N}$.

Tvrdenie 4.7
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je uninorma, $U \in \mathcal{U}$ a $U \notin \mathcal{N}$. Potom sa U dá vyjadriť ako ordinálny súčet uninormy a t-normy (t-konormy).

Tento výsledok dokazuje, že ordinálny súčet reprezentovateľných uninoriem vždy patrí do množiny $\mathcal{N}$. Obidva tieto výsledky, t.j. Tvrdenia 4.6 a 4.7, platia však aj pre ordinálny súčet d-internálnych uninoriem.

Tvrdenie 4.8
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je uninorma, $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}$ a nech existuje spojitá, ostro klesajúca funkcia $r\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $r(0) = 1$, $r(e) = e$ a $r(1) = 0$ taká, že U je spojitá na $[0,1] \setminus \{(x, r(x)) \mid x \in [0,1]\}$. Potom sa U dá vyjadriť ako ordinálny súčet reprezentovateľných a d-internálnych uninoriem.

Z predchádzajúceho vidíme, že uninorma $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}$ sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet reprezentovateľných a d-internálnych uninoriem vtedy a len vtedy ak existuje spojitá, ostro klesajúca funkcia r z Tvrdenia 4.8.

Navyše, uninorma $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}$ sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet reprezentovateľných uninoriem vtedy a len vtedy ak existuje spojitá, ostro klesajúca funkcia r z Tvrdenia 4.8 a U má spočítateľne veľa idempotentných bodov.

Predpoklad $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}$ môžeme pritom vynechať, lebo ak pre uninormu existuje spojitá, ostro klesajúca funkcia r z Tvrdenia 4.8 tak evidentne má spojité pridružené funkcie a dá sa ľahko ukázať, že z Tvrdenia 4.7 potom vyplýva $U \in \mathcal{N}$, keďže v opačnom prípade by r buď nebola spojitá, alebo by nebola ostro klesajúca.

4.1.4 Idempotentné uninormy

Pre idempotenté uninormy sme ukázali nasledovné výsledky.

Tvrdenie 4.9
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je idempotentná uninorma. Potom sa $([0,1], U)$ dá vyjadriť ako ordinálny súčet triviálnych pologrúp $(\{x\}, \mathrm{Id})$ pre $x \in [0,1]$.

Usporiadanie, ktoré vedie k idempotentnej uninorme pomocou ordinálneho súčtu triviálnych pologrúp sa dá charakterizovať nasledovne.

Tvrdenie 4.10
Nech P je indexová množina izomorfná s $[0,1]$ cez izomorfizmus φ. Pre všetky $p \in P$ označíme $X_p = \{x\}$ ak $\varphi(p) = x$. Nech $e \in [0,1]$ a nech $\preceq$ je úplné usporiadanie na P. Ak $([0,1], U)$ je ordinálny súčet pologrúp $\{(X_p, \mathrm{Id})\}_{p \in P}$ vzhľadom na usporiadanie $\preceq$, potom U je idempotentná uninorma s neutrálnym prvkom e vtedy a len vtedy ak sú nasledovné dve podmienky splnené:

(i) *$p_1 \prec p_2$ pre všetky $p_1, p_2 \in P$ také, že $X_{p_1} = \{x_1\}$, $X_{p_2} = \{x_2\}$, $x_1 < x_2$ a $x_1, x_2 \in [0,e]$,*

(ii) *$p_1 \prec p_2$ pre všetky $p_1, p_2 \in P$ také, že $X_{p_1} = \{y_1\}$, $X_{p_2} = \{y_2\}$, $y_1 > y_2$ a $y_1, y_2 \in [e,1]$.*

Tieto dva výsledky úplne charakterizujú konštrukciu idempotentných uninoriem pomocou ordinálnych súčtov. Vidíme teda, že existuje vzájomne jednoznačné zobrazenie medzi idempotentnými uninormami a špeciálnymi úplnými usporiadaniami na $[0,1]$.

4.1.5 Charakterizujúca multi-funkcia a množina bodov nespojitosti

V prípade ordinálnych súčtov reprezentovateľných uninoriem bola množina ich bodov nespojitosti pokrytá spojitou, ostro klesajúcou funkciou r kde $r(0) = 1$, $r(1) = 0$ a $r(x) = y$, $r(y) = x$ pre všetky $x, y \in]0,1[$ také, že $U(x,y) = e$. Tento fakt nás inšpiroval k štúdiu množiny bodov nespojitosti všetkých uninoriem so spojitými pridruženými funkciami. Tu sa nám podarilo získať podobné výsledky s tým, že pre všeobecnú uninormu $U \in \mathcal{U}$ funkcia r nie je funkcia s hodnotami v reálnych číslach, pretože jej graf môže obsahovať aj vertikálne časti. Preto vo všeobecnosti musíme pracovať s multi-funkciami.

Definícia 4.11
Zobrazenie $p\colon [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}([0,1])$ sa nazýva multi-funkcia na $[0,1]$. Takáto multi-funkcia priraďuje každému $x \in [0,1]$ podmnožinu $[0,1]$, t.j. $p(x) \subseteq [0,1]$. Ak je $\leq$ štandardné usporiadanie na $[0,1]$, tak sa multi-funkcia p nazýva

(i) nerastúca ak pre všetky $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$, platí $y_1 \geq y_2$ pre všetky $y_1 \in p(x_1)$ a všetky $y_2 \in p(x_2)$, t.j. kardinalita $\mathrm{Card}(p(x_1) \cap p(x_2)) \leq 1$,

(ii) symetrická ak $y \in p(x)$ vtedy a len vtedy ak $x \in p(y)$ pre všetky $x, y \in [0,1]$.

Graf multi-funkcie p budeme označovať symbolom $G(p)$, t.j. $(x,y) \in G(p)$ vtedy a len vtedy ak $y \in p(x)$.

Multi-funkcia $p\colon [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}([0,1])$ sa nazýva u-surjektívna ak pre všetky $y \in [0,1]$ existuje $x \in [0,1]$ také, že $y \in p(x)$. Dá sa ľahko vidieť, že symetrická multi-funkcia p je u-surjektívna ak $p(x) \neq \emptyset$ pre všetky $x \in [0,1]$.

Veta 4.12
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je uninorma, $U \in \mathcal{U}$. Potom existuje symetrická, u-surjektívna, nerastúca multi-funkcia r na $[0,1]$ taká, že U je spojitá na $[0,1]^2 \setminus G(r)$ a $U(x,y) = e$ implikuje $(x,y) \in G(r)$ pre všetky $(x,y) \in [0,1]^2$.

Pre každé $x \in [0,1]$ je $r(x)$ uzavretý interval (vrátane jednoprvkových). Navyše, U nemusí byť nespojitá vo všetkých bodoch z $G(r)$. V skutočnosti, U je spojitá vo všetkých bodoch $(x,y) \in [0,1]^2$ pre ktoré platí $U(x,y) = e$. U je tiež spojitá vo všetkých bodoch $(0,x),(x,0)$ kde $x > \inf\{t \in [0,1] \mid U(t,0) > e\}$ a vo všetkých bodoch $(1,x),(x,1)$ kde $x < \sup\{t \in [0,1] \mid U(t,1) < e\}$.

Existencia multi-funkcie z Vety 4.12 nám vo všeobecnosti nezaručuje, že uninorma má spojité pridružené funkcie. Vieme ale ukázať, že uninorma $U \in \mathcal{U}$ je v každom bode $(x,y) \in [0,1]^2$ buď zľava spojitá, alebo sprava spojitá (alebo spojitá). Dostaneme teda nasledovný výsledok.

Veta 4.13
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je uninorma. Potom $U \in \mathcal{U}$ vtedy a len vtedy ak U je spojitá na $[0,1]^2 \setminus G(r)$, kde r je symetrická, u-surjektívna, nerastúca multi-funkcia taká, že $U(x,y) = e$ implikuje $(x,y) \in G(r)$, a v každom bode $(x,y) \in [0,1]^2$ je uninorma U buď zľava spojitá, alebo sprava spojitá (alebo spojitá).

Funkcia r z predchádzajúcej vety sa nazýva charakterizujúca multi-funkcia. Podobne ako v prípade ordinálnych súčtov reprezentovateľných uninoriem, aj vo všeobecnosti delí graf charakterizujúcej multi-funkcie uninormy $U \in \mathcal{U}$ jednotkový štvorec (bez samotného grafu) na dve časti: nad (pod) grafom charakterizujúcej multi-funkcie dosahuje uninorma U hodnoty vyššie (nižšie) ako jej neutrálny prvok. Preto v prípade idempotentných uninoriem graf charakterizujúcej multi-funkcie obsahuje graf nerastúcej funkcie g z Vety 3.4.

Graf charakterizujúcej multi-funkcie uninormy $U \in \mathcal{U}$ sa dá rozdeliť na maximálne horizontálne, maximálne vertikálne a maximálne ostro klesajúce úseky. Navyše, hraničné body týchto úsekov sú vždy idempotentné body danej uninormy. Ukázali sme, že horizontálne úseky (na $[0,e]$) zodpovedajú t-normovým sčítancom, vertikálne úseky zodpovedajú t-konormovým sčítancom a ostro klesajúce úseky, ako sme ukázali vyššie, zodpovedajú sčítancom, ktoré sú zložené z reprezentovateľných a d-internálnych uninoriem.

4.1.6 Rozklad uninoriem so spojitými pridruženými funkciami pomocou ordinálneho súčtu

Každá spojitá t-norma (a podobne pre t-konormy) sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet (podľa Clifforda) idempotentných a Archimedovských pologrúp (t-noriem). Preto sme chceli ukázať podobný výsledok aj pre uninormy so spojitými pridruženými funkciami. Ako sme videli vyššie, idempotentné uninormy sa dajú rozložiť na ordinálny súčet triviálnych pologrúp. Naproti tomu sa Archimedovské t-normy, t-konormy a reprezentovateľné uninormy dajú rozložiť iba tak, že sa oddelia hraničné body.

Začnime s uninormami, ktoré majú spojité Archimedovské pridružené funkcie.

- Ak sú obe pridružené funkcie nilpotentné tak podľa [21, 22] platí $U \in \mathcal{U}_{\min} \cup \mathcal{U}_{\max}$. Každá takáto uninorma sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp $G_1 = ([0,e[\,, U|_{[0,e[^2})$, $G_2 = (\{e\}, \mathrm{Id})$ a $G_3 = (]e,1]\,, U|_{]e,1]^2})$, kde $1 < 3 < 2$ ak $U \in \mathcal{U}_{\min}$ a $3 < 1 < 2$ ak $U \in \mathcal{U}_{\max}$.

- Ak sú obe pridružené funkcie striktné tak podľa [21, 22] máme 7 možností ako U vyzerá. Ak je U reprezentovateľná tak sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp $G_1 = (\{0\}, \mathrm{Id})$, $G_2 = (]0,1[\,, U|_{]0,1[^2})$, $G_3 = (\{1\}, \mathrm{Id})$, kde $1 < 3 < 2$ ak je U konjunktívna a $3 < 1 < 2$ ak je U disjunktívna.

  Ak U nie je reprezentovateľná tak sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp $G_1 = (\{0\}, \mathrm{Id})$, $G_2 = (]0,e[\,, U|_{]0,e[^2})$, $G_3 = (\{e\}, \mathrm{Id})$, $G_4 = (]e,1[\,, U|_{]e,1[^2})$ a $G_5 = (\{1\}, \mathrm{Id})$. Monotónnosť implikuje $1 < 2 < 3$ a $5 < 4 < 3$. Preto dostávame šesť rôznych usporiadaní na príslušnej indexovej množine, každé zodpovedajúce jednej forme uninormy so striktnými pridruženými funkciami z [21].

- Ak je T_U nilpotentná a S_U je striktná potom sa U dá vyjadriť ako ordinálny súčet štyroch pologrúp $G_1 = ([0,e[\,, U|_{[0,e[^2})$, $G_2 = (\{e\}, \mathrm{Id})$, $G_3 = (]e,1[\,, U|_{]e,1[^2})$ a $G_4 = (\{1\}, \mathrm{Id})$. Monotónnosť implikuje $1 < 2$ a $4 < 3 < 2$. Ak $1 < 4 < 3 < 2$ potom $U \in \mathcal{U}_{\min}$. Ak $4 < 3 < 1 < 2$ potom $U \in \mathcal{U}_{\max}$ a ak $4 < 1 < 3 < 2$ potom $U(1,x) = 1$ pre všetky $x \in [0,1]$ a $U(x,y) = \min(x,y)$ pre všetky $x < e \leq y < 1$.

- Ak je T_U striktná a S_U je nilpotentná potom sa U dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp $G_1 = (\{0\}, \mathrm{Id})$, $G_2 = (]0,e[\,, U|_{]0,e[^2})$, $G_3 = (\{e\}, \mathrm{Id})$ a $G_4 = (]e,1]\,, U|_{]e,1]^2})$. Monotónnosť implikuje $1 < 2 < 3$ a $4 < 3$. Ak $1 < 2 < 4 < 3$ potom $U \in \mathcal{U}_{\min}$. Ak $4 < 1 < 2 < 3$ potom $U \in \mathcal{U}_{\max}$ a ak $1 < 4 < 2 < 3$ potom $U(0,x) = 0$ pre všetky $x \in [0,1]$ a $U(x,y) = \max(x,y)$ pre všetky $0 < x \leq e < y$.

Tu vidíme, že každá uninorma so spojitými Archimedovskými pridruženými funkciami sa dá rozložiť pomocou ordinálneho súčtu a preto základnými stavebnými kameňmi na konštrukciu takýchto uninoriem nebudú uninormy, ale pologrupy z nasledovnej definície. Poznamenajme, že podľa vzoru ordinálnych súčtov t-noriem (a reprezentácie spojitých t-noriem z [23]) nebudeme idempotentné pologrupy rozkladať na triviálne pologrupy.

Definícia 4.14
Nech pre $a, b, c, d \in [0,1]$ platí $a < b < c < d$, $v \in [b, c]$. Potom

(i) pologrupa $(]a,b[\cup \{v\} \cup]c,d[\,, *)$ sa nazýva reprezentovateľná ak je $*$ izomorfná cez (2) so zúžením reprezentovateľnej uninormy na $]0,1[^2$,

(ii) pologrupa $(]a,b[\,, *)$ sa nazýva t-striktná, ak je $*$ lineárne izomorfná so zúžením striktnej t-normy na $]0,1[^2$,

(iii) pologrupa $(]c,d[\,, *)$ sa nazýva s-striktná ak je $*$ lineárne izomorfná so zúžením striktnej t-konormy na $]0,1[^2$,

(iv) pologrupa $([a,b[\,, *)$ sa nazýva t-nilpotentná ak je $*$ lineárne izomorfná so zúžením nilpotentnej t-normy na $[0,1[^2$,

(v) pologrupa $(]c,d]\,, *)$ sa nazýva s-nilpotentná ak je $*$ lineárne izomorfná so zúžením nilpotentnej t-konormy na $]0,1]^2$,

(vi) pologrupa $(]a,b[\cup]c,d[\,, *)$ sa nazýva d-internálna pologrupa ak je $*$ izomorfná cez (2) so zúžením d-internálnej uninormy na $(]0,1[\setminus \{e\})^2$,

(vii) pologrupa $(]a,b[\,, *)$ sa nazýva t-internálna ak $* = \min$,

(viii) pologrupa $(]c,d[\,,*)$ sa nazýva s-internálna ak $*=\max$.

Rozklad uninormy $U \in \mathcal{U}$ na pologrupy z Definície 4.14 (a triviálne pologrupy) je trochu technicky náročný. Nepôjdeme preto veľmi do detailov a napíšeme len, že pomocou usporiadania indukovaného charakterizujúcou multi-funkciou U a pomocou delenia jednotkového intervalu indukovaného charakterizujúcou multi-funkciou a množinou idempotentných bodov U vieme ukázať nasledovný výsledok.

Veta 4.15
Nech $U \in \mathcal{U}$. Potom sa U dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp, ktoré sú buď triviálne, alebo sú jedného z ôsmych druhov pologrúp definovaných v Definícii 4.14.

Ukázali sme aj opačný výsledok a síce, že pomocou ôsmych druhov pologrúp z Definície 4.14, triviálnych pologrúp a vhodného usporiadania na príslušnej indexovej množine (ktoré zachováva monotónnosť výslednej operácie) vieme vždy skonštruovať uninormu so spojitými pridruženými funkciami pomocou ordinálneho súčtu (podľa Clifforda).

4.1.7 Uninormy spojité na $[0,e[^2 \cup]e,1]^2$

Charakterizácia uninoriem so spojitými pridruženými funkciami sa dá rozšíriť aj na niektoré uninormy spojité na $[0,e[^2 \cup]e,1]^2$. Takéto uninormy nemusia mať spojité pridružené funkcie a vo všeobecnosti sa nedajú rozložiť pomocou ordinálneho súčtu. Preto vieme obdobné výsledky získať iba pre uninormy, ktoré sú kancelatívne na niektorých špeciálnych podoblastiach jednotkového štvorca. Vo všeobecnosti vieme ukázať, že pridružené funkcie každej uninormy spojitej na $[0,e[^2 \cup]e,1]^2$ sú odvodené od spojitej t-subnormy a spojitej t-konormy. Aby sme to ukázali, potrebujeme zaviesť pojem projekcia t-normy (t-konormy) spojitá na hranici, ktorý bol zavedený v [15] a opravená definícia je nasledovná.

Definícia 4.16
Nech T je t-norma. Potom sa funkcia $M_T\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ daná vzťahom

$$M_T(x,y) = \begin{cases} T(x,y) & \text{ak } (x,y) \in [0,1[^2, \\ \lim\limits_{u \longrightarrow 1^-} T(u,y) & \text{ak } x=1, y<1, \\ \lim\limits_{u \longrightarrow 1^-} T(x,u) & \text{ak } x<1, y=1, \\ \lim\limits_{\substack{u \longrightarrow 1^- \\ v \longrightarrow 1^-}} T(u,v) & \text{ak } x=y=1 \end{cases}$$

nazýva projekcia t-normy T spojitá na hranici.

Takáto projekcia t-normy spojitá na hranici nemusí byť vždy asociatívna a preto sme ukázali nasledovné.

Tvrdenie 4.17
Pre t-normu $T\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je jej projekcia spojitá na hranici M_T t-subnormou vtedy a len vtedy ak sú nasledovné dve podmienky splnené:

(i) *pre všetky* $x, y \in [0,1[$ *buď* $T(u_0, x) = \lim\limits_{u \longrightarrow 1^-} T(u, x)$ *pre nejaké* $u_0 \in [0,1[$, *alebo* $T(a, y) = \lim\limits_{v \longrightarrow a^-} T(v, y)$, *pre* $a = \lim\limits_{u \longrightarrow 1^-} T(u, x)$,

(ii) *buď* $\lim\limits_{u \longrightarrow 1^-} T(u, u) = 1$, *alebo* $T(u_0, v_0) = \lim\limits_{u \longrightarrow 1^-} T(u, u)$ *pre nejaké* $u_0, v_0 \in [0,1[$, *alebo pre všetky* $x \in [0,1[$ *platí* $T(b, x) = \lim\limits_{v \longrightarrow b^-} T(v, x)$, *pre* $b = \lim\limits_{u \longrightarrow 1^-} T(u, u)$.

Dôsledok 4.18
Nech $T\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je t-norma, ktorá je zľava spojitá na* $[0,1[^2$. *Potom je jej projekcia spojitá na hranici* M_T *t-subnorma.*

Pre uninormy spojité na $[0,e[^2 \cup]e,1]^2$ je potom M_{T_U} vždy spojitá t-subnorma a projekcia S_U spojitá na hranici je spojitá t-superkonorma.

Ak T_U nie je spojitá tak jej projekcia spojitá na hranici je spojitá t-subnorma, ktorá nie je t-norma, a preto sa podľa [17, 29] dá vyjadriť ako ordinálny súčet spojitých Archimedovských t-noriem a spojitej Archimedovskej t-subnormy. Preto ak T_U nie je spojitá potom sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet spojitých Archimedovských t-noriem, spojitej Archimedovskej t-subnormy zúženej na $[0,1[^2$ a triviálnej pologrupy na $\{1\}$. Podobne sa dá rozložiť S_U.

Najskôr sa zamerajme na prípad keď sú obidve pridružené funkcie Archimedovské. Za predpokladu kancelativity dostávame nasledovné.

Tvrdenie 4.19
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je uninorma taká, že* M_{T_U} *je spojitá, kancelatívna t-subnorma, ktorá nie je t-norma a* M_{S_U} *je spojitá, kancelatívna t-superkonorma, ktorá nie je t-konorma. Potom existuje rastúci izomorfizmus* $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *taký, že* $U(x,y) = \varphi^{-1}(UP(\varphi(x), \varphi(y)))$ *pre všetky* $(x,y) \in [0,1]^2$, *kde* UP *je uninorma taká, že* $M_{T_{UP}} = \frac{x \cdot y}{2}$ *a* $M_{S_{UP}} = \frac{1+x+y-x\cdot y}{2}$.

Tvrdenie 4.20
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je uninorma taká, že* M_{T_U} *je spojitá, kancelatívna t-subnorma, ktorá nie je t-norma a* M_{S_U} *je spojitá kancelatívna t-konorma. Potom existuje rastúci izomorfizmus* $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *taký, že* $U(x,y) = \varphi^{-1}(UPT(\varphi(x), \varphi(y)))$ *pre všetky* $(x,y) \in [0,1]^2$, *kde* UPT *je uninorma taká, že* $M_{T_{UPT}} = \frac{x \cdot y}{2}$ *a* $M_{S_{UPT}} = x + y - x \cdot y$.

Tvrdenie 4.21
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je uninorma taká, že* M_{T_U} *je spojitá, kancelatívna t-norma a* M_{S_U} *je spojitá, kancelatívna t-superkonorma, ktorá nie je t-konorma. Potom existuje rastúci izomorfizmus* $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *taký, že* $U(x,y) = \varphi^{-1}(UPS(\varphi(x), \varphi(y)))$ *pre všetky* $(x,y) \in [0,1]^2$, *kde* UPS *je uninorma taká, že* $M_{T_{UPS}} = x \cdot y$ *a* $M_{S_{UPS}} = \frac{1+x+y-x\cdot y}{2}$.

Tieto tri výsledky popisujú hodnoty uninormy spojitej na $[0,e[^2 \cup]e,1]^2$, ktorá má kancelatívne, Archimedovské pridružené funkcie, na $[0,e]^2$ a na $[e,1]^2$. Nasledovný výsledok popisuje hodnoty uninormy na zvyšku jednotkového štvorca.

Tvrdenie 4.22
Nech $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je uninorma s neutrálnym prvkom* $e \in \,]0,1[$ *taká, že* M_{T_U} *a* M_{S_U} *sú spojité a kancelatívne. Potom platí práve jedno z nasledovných siedmych tvrdení.*

(i) $U \in \mathcal{U}_{\min}$,

(ii)
$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T_U(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \textit{ak } (x,y) \in [0,e]^2\,, \\ e + (1-e) \cdot S_U(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \textit{ak } (x,y) \in [e,1]^2\,, \\ 1 & \textit{ak } x = 1 \textit{ alebo } y = 1, \\ \min(x,y) & \textit{inak,} \end{cases}$$

(iii)
$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T_U(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \textit{ak } (x,y) \in [0,e]^2\,, \\ e + (1-e) \cdot S_U(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \textit{ak } (x,y) \in [e,1]^2\,, \\ 1 & \textit{ak } x = 1, y > 0 \textit{ alebo } y = 1, x > 0, \\ \min(x,y) & \textit{inak,} \end{cases}$$

(iv) $U \in \mathcal{U}_{\max}$,

(v)
$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T_U(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \textit{ak } (x,y) \in [0,e]^2\,, \\ e + (1-e) \cdot S_U(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \textit{ak } (x,y) \in [e,1]^2\,, \\ 0 & \textit{ak } x = 0 \textit{ alebo } y = 0, \\ \max(x,y) & \textit{inak,} \end{cases}$$

(vi)
$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T_U(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \textit{ak } (x,y) \in [0,e]^2\,, \\ e + (1-e) \cdot S_U(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \textit{ak } (x,y) \in [e,1]^2\,, \\ 0 & \textit{ak } x = 0, y < 1 \textit{ alebo } y = 0, x < 1, \\ \max(x,y) & \textit{inak,} \end{cases}$$

(vii) U *je reprezentovateľná.*

Pre kombináciu (spojitej) nilpotentnej pridruženej funkcie a nespojitej kancelatívnej pridruženej funkcie dostávame nasledovné výsledky.

Tvrdenie 4.23
Nech $U\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ *je uninorma s neutrálnym prvkom* $e \in \,]0,1[$ *taká, že* M_{T_U} *je spojitá, kancelatívna t-subnorma a* S_U *je nilpotentná t-konorma. Potom platí práve jedno z nasledovných troch tvrdení:*

(i) $U \in \mathcal{U}_{\min}$,

(ii) $U \in \mathcal{U}_{\max}$,

(iii)

$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T_U(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \textit{ak } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (1-e) \cdot S_U(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \textit{ak } (x,y) \in [e,1]^2, \\ 0 & \textit{ak } x = 0 \textit{ alebo } y = 0, \\ \max(x,y) & \textit{inak.} \end{cases}$$

Tvrdenie 4.24
Nech $U\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ je uninorma s neutrálnym prvkom $e \in \,]0,1[$ taká, že M_{S_U} je spojitá kancelatívna t-superkonorma a T_U je nilpotentná t-norma. Potom platí práve jedno z nasledovných troch tvrdení:

(i) $U \in \mathcal{U}_{\min}$,

(ii) $U \in \mathcal{U}_{\max}$,

(iii)

$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T_U(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \textit{ak } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (1-e) \cdot S_U(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \textit{ak } (x,y) \in [e,1]^2, \\ 1 & \textit{ak } x = 1 \textit{ alebo } y = 1, \\ \min(x,y) & \textit{inak.} \end{cases}$$

V prípade, že niektorá z pridružených funkcií nie je Archimedovská budeme uvažovať tri prípady:

1. Ak T_U (S_U) je nespojitá a príslušná t-subnorma (t-superkonorma), ktorá nie je t-norma (t-konorma), z rozkladu M_{T_U} (M_{S_U}) pomocou ordinálneho súčtu, je kancelatívna.

2. Ak T_U je spojitá t-norma a S_U je nespojitá a príslušná t-superkonorma, ktorá nie je t-konorma, z rozkladu M_{S_U} pomocou ordinálneho súčtu, je kancelatívna.

3. Ak S_U je spojitá t-konorma a T_U je nespojitá a príslušná t-subnorma, ktorá nie je t-norma, z rozkladu M_{T_U} pomocou ordinálneho súčtu, je kancelatívna.

Vo všetkých troch prípadoch vieme nájsť idempotentné body $a \in [0,e]$, $b \in [e,1]$ také, že zúženie U na $[a,b]^2$ je uninorma (alebo t-norma, alebo t-konorma) s Archimedovskými pridruženými funkciami (a teda ju vieme charakterizovať pomocou predchádzajúcich výsledkov) a zúženie U na $[0,a]^2$ ($[b,1]^2$) je lineárna transformácia spojitej t-normy (t-konormy). Navyše, množina $([0,a[\, \cup \{U(a,b)\} \cup \,]b,1])^2$ je uzavretá vzhľadom na U. Ak je bod $U(a,b)$ neutrálnym prvkom zúženia U na $([0,a[\, \cup \{U(a,b)\} \cup \,]b,1])^2$ potom sa $([0,1],U)$ dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp $G_1 = ([0,a[\, \cup \{U(a,b)\} \cup \,]b,1]\,, U|_{([0,a[\cup\{U(a,b)\}\cup]b,1])^2})$ a $G_2 = ([a,b]\,, U|_{[a,b]^2})$, kde $1 < 2$ a G_1 je transformácia uninormy so spojitými pridruženými funkciami pomocou (1).

Ak bod $U(a,b)$ nie je neutrálnym prvkom zúženia U na $([0,a[\,\cup\,\{U(a,b)\}\cup\,]b,1])^2$ tak je situácia trochu komplikovanejšia. Aj v tomto prípade ale vieme podobne ako v predchádzajúcej časti ukázať, že U sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp z Definície 4.14, triviálnych pologrúp a jednej alebo dvoch ďalších pologrúp, kde jedna zodpovedá zúženiu spojitej t-subnormy a druhá zodpovedá zúženiu spojitej t-konormy.

Z týchto výsledkov vidíme, že uninormy spojité na $[0,e[^2\cup\,]e,1]^2$ majú podobnú štruktúru ako uninormy so spojitými pridruženými funkciami, okrem prípadu keď rozklad M_{T_U} (M_{S_U}) pomocou ordinálneho súčtu obsahuje t-subnormu (t-superkonormu), ktorá nie je t-norma (t-konorma) a nie je kancelatívna.

4.2 n-Uninormy so spojitými pridruženými funkciami

n-Uninormy zovšeobecňujú uninormy, pričom môžeme povedať, že sú zložené z uninoriem nižších rádov, ktoré sú dokopy spojené čiastočne lokálnym anihilátorom a čiastočne pomocou ordinálneho súčtu. Tento fakt nás inšpiroval k zavedeniu konštrukcie pomocou z-ordinálneho súčtu, ktorá rozširuje Cliffordov ordinálny súčet aj na čiastočne usporiadané indexové množiny. Pomocou tejto konštrukcie potom vieme rozšíriť výsledky z predchádzajúcej časti aj na n-uninormy so spojitými pridruženými funkciami. Tak ako v prípade uninoriem z $\mathcal{U}$ aj tu budeme rozoberať charakterizujúce (multi-)funkcie n-uninoriem ako aj ich rozklad pomocou z-ordinálneho súčtu na pologrupy z Definície 4.14 a triviálne pologrupy.

4.2.1 Z-ordinálny súčet a n-uninormy so spojitými pridruženými funkciami

Z-ordinálny súčet je definovaný v nasledovnej vete.

Veta 4.25
Nech A a B sú dve indexové množiny také, že $A\cap B=\emptyset$ a $C=A\cup B\neq\emptyset$. Nech $(G_\alpha)_{\alpha\in C}$ kde $G_\alpha=(X_\alpha,*_\alpha)$ je systém pologrúp a nech C je čiastočne usporiadaná reláciou $\preceq$ tak, že $(C,\preceq)$ je dolný polozväz. Nech každá pologrupa G_α pre $\alpha\in A$ má anihilátor z_α, a nech pre všetky $\alpha,\beta\in C$ také, že α a β sú neporovnateľné platí $\alpha\wedge\beta\in A$. Nech pre všetky $\alpha,\beta\in C$, $\alpha\neq\beta$, sú množiny X_α a X_β buď disjunktné, alebo $X_\alpha\cap X_\beta=\{x_{\alpha,\beta}\}$. V druhom prípade budeme predpokladať, že pre všetky $\gamma\in C$, ktoré sú neporovnateľné s $\alpha\wedge\beta$ platí $\alpha\wedge\gamma=\beta\wedge\gamma$ a pre každé $\gamma\in C$ kde $\alpha\wedge\beta\prec\gamma\prec\alpha$ alebo $\alpha\wedge\beta\prec\gamma\prec\beta$ platí $X_\gamma=\{x_{\alpha,\beta}\}$. Navyše,

(i) *ak $\alpha\wedge\beta\in A$ potom $x_{\alpha,\beta}=z_{\alpha\wedge\beta}$ je anihilátorom oboch pologrúp G_β a G_α;*

(ii) *ak $\alpha\wedge\beta=\alpha\in B$ potom $x_{\alpha,\beta}$ je zároveň anihilátorom pologrupy G_β a neutrálnym prvkom pologrupy G_α.*

Označme $X = \bigcup_{\alpha\in C} X_\alpha$ *a definujme binárnu operáciu* $*$ *na* X *vzťahom*

$$x * y = \begin{cases} x *_\alpha y & \text{ak } (x,y) \in X_\alpha \times X_\alpha, \\ x & \text{ak } (x,y) \in X_\alpha \times X_\beta,\ \alpha \neq \beta, \text{ a } \alpha \wedge \beta = \alpha \in B, \\ y & \text{ak } (x,y) \in X_\alpha \times X_\beta,\ \alpha \neq \beta, \text{ a } \alpha \wedge \beta = \beta \in B, \\ z_\gamma & \text{ak } (x,y) \in X_\alpha \times X_\beta,\ \alpha \neq \beta, \text{ a } \alpha \wedge \beta = \gamma \in A. \end{cases}$$

Potom je $G = (X, *)$ *pologrupa. Pologrupa* G *je komutatívna vtedy a len vtedy ak je pre každé* $\alpha \in C$ *pologrupa* G_α *komutatívna.*

Množinu A z predchádzajúcej vety budeme nazývať vetviaca množina. Ak je vetviaca množina prázdna, t.j. ak $A = \emptyset$ potom je množina $C = B$ úplne usporiadaná a z-ordinálny súčet je v tomto prípade zhodný so štandardným Cliffordovým ordinálnym súčtom.

Ak $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ pre nejaké $\alpha, \beta \in C$ potom môžeme podmienku $\alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma$ pre všetky $\gamma \in C$ neporovnateľné s $\alpha \wedge \beta$ nahradiť (pre niektoré alebo všetky také $\gamma \in C$) podmienkou $X_\gamma = \{z_{\alpha\wedge\beta\wedge\gamma}\}$.

Koncept z-ordinálneho súčtu je pre nás dôležitý najmä preto, lebo nám umožňuje konštruovať neklesajúce funkcie $F\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $F(0,0) = 0$, $F(1,1) = 1$, ktoré majú anihilátor vo vnútri jednotkového intervalu, pokým v prípade ordinálneho súčtu bol anihilátor takejto funkcie vždy len na jeho okrajoch, t.j. v 0 alebo v 1. Takto napríklad môžeme konštruovať nullnormy a n-uninormy.

Podobne ako pre uninormy, aj pre n-uninormy vieme ukázať nasledovné.

Tvrdenie 4.26
Nech $U^n\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je idempotentná* n*-uninorma. Potom sa* $([0,1], U^n)$ *dá vyjadriť ako* z*-ordinálny súčet triviálnych pologrúp* $(\{x\}, \mathrm{Id})$ *pre* $x \in [0,1]$.

Čiastočné usporiadania, ktoré definujú idempotentné n-uninormy pomocou z-ordinálneho súčtu triviálnych pologrúp sú popísané v nasledovnom tvrdení.

Tvrdenie 4.27
Nech P *je indexová množina izomorfná s* $[0,1]$ *cez izomorfizmus* φ. *Pre všetky* $p \in P$ *označíme* $X_p = \{x\}$ *ak* $\varphi(p) = x$. *Nech* $e_1, \dots, e_n, z_1, \dots, z_{n-1} \in [0,1]$, $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = 1$, $e_i \in [z_{i-1}, z_i]$ *pre* $i = 1, \dots, n$. *Označíme* $A = \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$, *kde* $X_{q_i} = \{z_i\}$ *pre* $i = 1, \dots, n-1$ *a* $B = P \setminus A$. *Nech* $\preceq$ *je čiastočné usporiadanie na* P *také, že všetky podmienky Vety 4.25 sú splnené. Ak* $([0,1], U^n)$ *je* z*-ordinálny súčet pologrúp* $\{(X_p, \mathrm{Id})\}_{p\in P}$ *voči čiastočnému usporiadaniu* $\preceq$ *potom je* U^n *idempotentná* n*-uninorma s* n*-neutrálnym prvkom* $\{e_1, \dots, e_n\}_{z_1,\dots,z_{n-1}}$ *vtedy a len vtedy ak sú splnené nasledovné podmienky:*

(i) $a_1 \prec a_2$ *pre všetky* $a_1, a_2 \in P$ *také, že* $X_{a_1} = \{x_1\}$, $X_{a_2} = \{x_2\}$, $x_1 < x_2$ *a* $x_1, x_2 \in [z_{i-1}, e_i]$, *pre* $i = 1, \dots, n$.

(ii) $b_1 \prec b_2$ *pre všetky* $b_1, b_2 \in P$ *také, že* $X_{b_1} = \{y_1\}$, $X_{b_2} = \{y_2\}$, $y_1 > y_2$ *a* $y_1, y_2 \in [e_i, z_i]$ *pre* $i = 1, \dots, n$.

(iii) *Pre* $a, b \in P$, $X_a = \{x\}$, $X_b = \{y\}$, *sú* a *a* b *neporovnateľné vtedy a len vtedy ak existuje* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *také, že* $q_i \preceq a$, $q_i \preceq b$ *a* $z_i \in]\min(x, y), \max(x, y)[$.

(iv) a_1 *a* a_2 *sú porovnateľné pre všetky* $a_1, a_2 \in P$ *také, že* $X_{a_1} = \{x_1\}$, $X_{a_2} = \{x_2\}$, *kde* $(x_1, x_2) \in [z_{i-1}, z_i]^2$ *pre* $i = 1, \ldots, n$.

Ukázali sme tiež, že idempotentná n-uninorma zodpovedá čiastočnému usporiadaniu, ktoré pripomína binárny strom, kde uzly tohto stromu zodpovedajú deliacim bodom $z_1, \ldots, z_{n-1}$.

Pri popise štruktúry n-uninoriem z $\mathcal{U}_n$ hrajú dôležitú úlohu n-uninormy z takzvanej Triedy 1, t.j. také pre ktoré $U^n(0, 1) = z_k$ pre nejaké $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. n-Uninorma $U^n \in \mathcal{U}_n$ z Triedy 1 má veľmi jednoduchú štruktúru: jej zúženie na $[0, z_k]^2$ je lineárna transformácia nejakej k-uninormy z $\mathcal{U}_k$, jej zúženie na $[z_k, 1]^2$ je lineárna transformácia nejakej $(n-k)$-uninormy z $\mathcal{U}_{n-k}$ a na zvyšku jednotkového štvorca má táto n-uninorma hodnotu z_k.

Pre všetky $U^n \in \mathcal{U}_n$ platí $U^n(e_1, e_n) = z_k$ pre nejaké $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Bod z_k je potom anihilátorom zúženia U^n na $[e_1, e_n]^2$ a pre všetky $x \in [0, 1]$ platí $U^n(x, z_k) \in \{x, z_k\}$. Ak definujeme

$$x_0 = \inf\{x \in [0, 1] \mid U^n(x, z_k) = z_k\} \tag{5}$$

a

$$y_0 = \sup\{y \in [0, 1] \mid U^n(y, z_k) = z_k\} \tag{6}$$

potom je zúženie U^n na $[x_0, y_0]^2$ (alebo na $]x_0, y_0[^2$, alebo na $[x_0, y_0[^2$, alebo na $]x_0, y_0]^2$) lineárnou transformáciou nejakej n-uninormy z Triedy 1, ktorá má spojité pridružené funkcie (alebo jej zúženia na $]0, 1[^2$, alebo na $[0, 1[^2$, alebo na $]0, 1]^2$). Vidíme teda, že v jadre každej n-uninormy z $\mathcal{U}_n$ je n-uninorma z Triedy 1.

Veta 4.28
Nech $U^n\colon [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ *je* n*-uninorma a nech* $U^n \in \mathcal{U}_n$. *Ak* $U^n(x_0, y_0) = z_k$ *potom sa* U^n *dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrupy* $G_1 = ([0, x_0[\cup \{z_k\} \cup]y_0, 1] \,, U^n|_{([0,x_0[\cup\{z_k\}\cup]y_0,1])^2})$ *a pologrupy* $G_2 = ([x_0, y_0] \,, U^n|_{[x_0,y_0]^2})$, *kde* G_2 *je lineárne izomorfná s* n*-uninormou z Triedy* 1 *a* G_1 *je izomorfná pomocou* (1) *s uninormou so spojitými pridruženými funkciami. Usporiadanie pologrúp v tomto ordinálnom súčte je* $1 < 2$.

Ak $U^n(x_0, y_0) \in \{x_0, y_0\}$ definujeme

- $y_1 = \sup\{y \in [y_0, 1] \mid U^n(x_0, y) = x_0\}$ ak $U^n(x_0, y_0) = x_0$,
- $x_1 = \inf\{x \in [0, x_0] \mid U^n(y_0, x) = y_0\}$ ak $U^n(x_0, y_0) = y_0$.

V takomto prípade môžeme naše výsledky zhrnúť v nasledovnej vete.

Veta 4.29
Nech $U^n \in \mathcal{U}_n$, $U^n(x_0, y_0) = x_0$ *a* $U^n(y_1, x_0) = x_0$ *(*$U^n(x_0, y_0) = y_0$ *a* $U^n(x_1, y_0) = y_0$*). Potom sa* U^n *dá vyjadriť ako ordinálny súčet pologrupy, ktorá je lineárnou transformáciou (zúženia)* n*-uninormy z Triedy* 1 *na interval* $[x_0, y_0]^2$ *(*$[x_0, y_0[^2$, $]x_0, y_0]^2$, $]x_0, y_0[^2$*) a nanajvýš dvoch iných pologrúp.*

- *Najmenšia z týchto pologrúp v zodpovedajúcom úplnom usporiadaní je vždy pologrupa, ktorá je izomorfná cez* (1) *s uninormou so spojitými pridruženými funkciami.*
- *Ak* $U^n(x_0, y_0) = x_0$, $U^n(z_k, y_0) = y_0$, $y_1 = y_0$ *potom tento ordinálny súčet obsahuje aj pologrupu* $(\{y_0\}, \mathrm{Id})$.
- *Ak* $U^n(x_0, y_0) = y_0$, $U^n(z_k, x_0) = x_0$, $x_1 = x_0$ *potom tento ordinálny súčet obsahuje aj pologrupu* $(\{x_0\}, \mathrm{Id})$.
- *Ak* $y_1 > y_0$ $(x_1 < x_0)$ *potom tento ordinálny súčet obsahuje aj pologrupu, ktorá je lineárne izomorfná so (zúžením) spojitej t-konormy (t-normy).*

Ak $U^n(y_1, x_0) = y_1$ $(U^n(x_1, y_0) = x_1)$ dostaneme podobné výsledky, ale tu nie je najmenšia pologrupa izomorfná s uninormou, ale so zovšeobecnenou kompozitnou uninormou so spojitými pridruženými funkciami (viď Definícia 4.2). Takáto pologrupa sa dá tiež vyjadriť ako ordinálny súčet pologrúp z Definície 4.14 a triviálnych pologrúp.

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že n-uninormy z Triedy 1 hrajú pri charakterizácii n-uninoriem dôležitú úlohu. Ich štruktúra je pritom, podobne ako v prípade nullnoriem, ľahko vyjadriteľná pomocou z-ordinálneho súčtu. To je dôvod aby sme si položili otázku, či sa dá každá n-uninorma z $\mathcal{U}_n$ vyjadriť ako z-ordinálny súčet pologrúp z Definície 4.14 a triviálnych pologrúp. Túto otázku za chvíľu kladne zodpovieme.

4.2.2 Charakterizujúce funkcie n-uninoriem so spojitými pridruženými funkciami

Charakterizujúca funkcia uninormy U so spojitými pridruženými funkciami úzko súvisí s bodmi $(x, y) \in [0,1]^2$, pre ktoré platí $U(x, y) = e$. Pre takúto uninormu a bod $x \in [0,1]$ existuje maximálne jeden bod $y \in [0,1]$ taký, že $U(x, y) = e$. Toto však neplatí v prípade n-uninoriem so spojitými pridruženými funkciami a preto najskôr musíme pokryť príslušné anomálne prípady. Ako prvé poznamenajme, že ak pre n-uninormu platí $e_i = e_{i+1}$ pre nejaké $i \in \{1, \dots, n-1\}$, tak je daná n-uninorma zároveň aj $(n-1)$-uninorma a preto sa budeme zameriavať iba na n-uninormy pre ktoré platí $e_1 < e_2 < \cdots < e_n$. Ďalej máme nasledovné výsledky.

Tvrdenie 4.30
Nech $U^n\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je n-uninorma,* $U^n \in \mathcal{U}_n$. *Ak* $U^n(x, y_1) = U^n(x, y_2) = e_i$ *pre nejaké* $x, y_1, y_2 \in [0,1]$, $y_1 < y_2$, a $i \in \{1, \dots, n\}$ *potom* $e_i \in \{z_{i-1}, z_i\}$.

Veta 4.31
Nech $U^n\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *je n-uninorma,* $U^n \in \mathcal{U}_n$. *Ak pre nejaké* $i \in \{1, \dots, n\}$ *platí* $e_i = z_j$ *pre* $j \in \{1, \dots, n-1\}$ *potom* U^n *je* $(n-1)$*-uninorma z* $\mathcal{U}_{(n-1)}$ *s* $(n-1)$*-neutrálnym prvkom* $\{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n\}_{z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_{n-1}}$.

Tieto výsledky ukazujú, že ak $U^n(x, y_1) = U^n(x, y_2) = e_i$ pre nejaké $x, y_1, y_2 \in [0,1]$, $y_1 < y_2$ potom sa rád uninormy dá znížiť. Opakovaným použitím týchto výsledkov môžeme každú n-uninormu U^n z $\mathcal{U}_n$ zredukovať na m-uninormu U^m z $\mathcal{U}_m$ takú, že ak e_i^* je i-ty lokálny neutrálny prvok U^m potom $e_i^* \in \{z_{i-1}^*, z_i^*\}$ implikuje $e_i^* \in \{0,1\}$. m-Uninormu U^m budeme nazývať redukovaná forma n-uninormy U^n (alebo krátko redukovaná m-uninorma).

Pre redukovanú n-uninormu U^n a $x, y_1, y_2 \in [0,1]$, $y_1 < y_2$, rovnosť $U^n(x,y_1) = U^n(x,y_2) = e_i$ pre nejaké $i \in \{1,\dots,n\}$ implikuje $e_i \in \{0,1\}$, t.j. $i \in \{1,n\}$. Keďže $e_1 = 0$ ($e_n = 1$) je neutrálny prvok U^n na $[0,z_1]$ ($[z_{n-1},1]$) platí $U^n(x,0) > 0$ pre všetky $x > 0$ ($U^n(x,1) < 1$ pre všetky $x < 1$). Preto pre redukované n-uninormy pre všetky $i \in \{1,\dots,n\}$ a všetky $x \in [0,1]$ existuje nanajvýš jedno $y \in [0,1]$ také, že $U^n(x,y) = e_i$. Kvôli spomenutým faktom sa v tejto časti zameriame len na redukované n-uninormy.

Teraz už môžeme definovať charakterizujúce funkcie a charakterizujúce multi-funkcie pre n-uninormy z $\mathcal{U}_n$.

Definícia 4.32
Nech $U^n\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je redukovaná n-uninorma, nech $U^n \in \mathcal{U}_n$ a nech $i \in \{1,\dots,n\}$. Definujme funkciu $g_i\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ vzťahom

$$g_i(x) = \sup\{t \in [0,1] \mid U^n(x,t) < e_i\},$$

kde $\sup\emptyset = 0$. Funkcia g_i sa bude nazývať i-ta charakterizujúca funkcia n-uninormy U^n.

Pre charakterizujúcu funkciu g_i pre $i \in \{1,\dots,n\}$ platí, že

- g_i je nerastúca,
- $g_i(e_i) = e_i$,
- Ak $e_1 = 0$ potom $g_1(x) = 0$ pre všetky $x \in [0,1]$.
- Ak $e_n = 1$ potom $g_n(x) = 1$ pre všetky $x \in [0,1]$.
- $U^n(x,t) < e_i$ pre všetky $t < g_i(x)$ a $U^n(x,t) > e_i$ pre všetky $t > g_i(x)$.

Definícia 4.33
Nech $U^n\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je redukovaná n-uninorma, $U^n \in \mathcal{U}_n$, a nech $i \in \{1,\dots,n\}$. Definujme charakterizujúcu multi-funkciu $r_i\colon [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}([0,1])$ vzťahom

$$r_i(x) = \begin{cases} \left[\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} g_i(t), 1\right] & \text{ak } x = 0,\\ \left[0, \lim\limits_{t\longrightarrow 1^-} g_i(t)\right] & \text{ak } x = 1,\\ \left[\lim\limits_{t\longrightarrow x^+} g_i(t), \lim\limits_{t\longrightarrow x^-} g_i(t)\right] & \text{inak.}\end{cases}$$

Potom $g_i(x) \in r_i(x)$ pre všetky $x \in [0,1]$, $i \in \{1,\dots,n\}$ a ak je g_i spojitá v $x \in]0,1[$ pre nejaké $i \in \{1,\dots,n\}$ Potom $r_i(x) = \{g_i(x)\}$.

Veta 4.34
Charakterizujúca multi-funkcia r_i redukovanej n-uninormy $U^n \in \mathcal{U}_n$ je nerastúca, symetrická a u-surjektívna (pozri Definíciu 4.11) pre všetky $i = 1, \ldots, n$. Navyše, nad (pod) grafom charakterizujúcej multi-funkcie r_i nadobúda n-uninorma U^n hodnoty väčšie (menšie) ako e_i.

Ľahko sa ukáže, že $U^n(x, y) = e_i$ implikuje $(x, y) \in G(r_i)$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$. Navyše, každý bod nespojitosti redukovanej n-uninormy U^n sa dá pokryť grafom aspoň jednej charakterizujúcej multi-funkcie.

Veta 4.35
Nech $U^n \colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je redukovaná n-uninorma a nech $U^n \in \mathcal{U}_n$. Ak $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ je bod nespojitosti U^n potom $(x_0, y_0) \in \bigcup_{i=1}^{n} G(r_i)$.

Obrátene, ak chceme ukázať, že redukovaná n-uninorma patrí do $\mathcal{U}_n$, nestačí na to podmienka, že všetky body nespojitosti sú pokryté symetrickými, u-surjektívnymi, nerastúcimi multi-funkciami r_i na $[0,1]$, kde $U^n(x, y) = e_i$ implikuje $(x, y) \in G(r_i)$ pre $i = 1, \ldots, n$. Neplatí ani tvrdenie, ako v prípade uninoriem so spojitými pridruženými funkciami, že taká uninorma je v každom bode jednotkového štvorca buď zľava, alebo sprava spojitá (alebo spojitá). Platí ale nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 4.36
Nech $U^n \colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je redukovaná n-uninorma, $U^n \in \mathcal{U}_n$, a nech $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$. Ak existuje práve jedno $i \in \{1, \ldots, n\}$ také, že $(x_0, y_0) \in G(r_i)$ potom U^n je zľava, alebo sprava spojitá (alebo spojitá) v (x_0, y_0).

Potom dostávame žiadaný výsledok.

Veta 4.37
Nech $U^n \colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je redukovaná n-uninorma. Nech U^n je spojitá na $[0,1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G(r_i)$, kde r_i je symetrická, u-surjektívna, nerastúca multi-funkcia na $[0,1]$ taká, že $U^n(x, y) = e_i$ implikuje $(x, y) \in G(r_i)$ pre $i = 1, \ldots, n$. Navyše, nech U^n je buď zľava spojitá, alebo sprava spojitá (alebo spojitá) v každom bode $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$, pre ktorý existuje práve jedno $i \in \{1, \ldots, n\}$ kde $(x_0, y_0) \in G(r_i)$. Potom $U^n \in \mathcal{U}_n$.

4.2.3 Rozklad n-uninoriem so spojitými pridruženými funkciami pomocou z-ordinálneho súčtu

V poslednej časti práce sme ukázali rozklad n-uninoriem so spojitými pridruženými funkciami pomocou z-ordinálneho súčtu na pologrupy z Definície 4.14 a triviálne pologrupy. Nakoľko najjednoduchšie n-uninormy z Triedy 1 sú nullnormy, prvé výsledky sa venujú im. Každá nullnorma s anihilátorom z sa dá vyjadriť ako z-ordinálny súčet troch pologrúp: $G_1 = ([0, z], S^*)$, $G_2 = ([z, 1], T^*)$ a $G_3 = (\{z\}, \mathrm{Id})$, kde S^* (T^*) je lineárna transformácia pridruženej t-konormy (t-normy) na interval $[0, z]$ ($[z, 1]$), vetviaca množina je $A = \{3\}$ a príslušné čiastočné usporiadanie je dané vzťahom $1 \wedge 2 = 3$. Každá spojitá t-norma (t-konorma) sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet spojitých Archimedovských t-noriem (t-konoriem). Navyše, spojitá Archimedovská t-norma (t-konorma) sa pomocou ordinálneho (z-ordinálneho) súčtu dá rozložiť iba na jednu netriviálnu a jednu, alebo dve triviálne pologrupy, ktoré zodpovedajú koncovým bodom 0 a 1. Preto v nasledovnom výsledku povieme, že pologrupa je odvodená od spojitej Archimedovskej t-normy (t-konormy) ak vznikne zo spojitej Archimedovskej t-normy (t-konormy) vynechaním jedného, alebo oboch koncových bodov. Takéto pologrupy evidentne patria medzi pologrupy z Definície 4.14.

Veta 4.38
Nech $V\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je nullnorma s anihilátorom $z \in \,]0,1[\,$, ktorá má spojité pridružené funkcie. Potom sa V dá vyjadriť ako z-ordinálny súčet pologrúp odvodených od spojitých Archimedovských t-noriem, spojitých Archimedovských t-konoriem a idempotentných t-noriem a t-konoriem (vrátane triviálnych pologrúp).

Pre hodnoty n-uninoriem so spojitými pridruženými funkciami môžeme ukázať nasledovné.

Tvrdenie 4.39
Nech $U^n\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ je n-uninorma a nech $U^n \in \mathcal{U}_n$. Nech $x \in \,]z_{i-1}, z_i[\,$ a $y \in \,]z_{j-1}, z_j[\,$ pre nejaké $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$, kde $U^n(e_i, e_j) = z_k$. Potom platí:

(i) *Ak $x \geq e_i$ a $y \leq e_j$ potom $U^n(x, y) = z_k$.*
(ii) *Ak $x \leq e_i$ a $y \leq e_j$ potom $U^n(x, y) = U^n(x, z_k) \in \{x, z_k\}$.*
(iii) *Ak $x \geq e_i$ a $y \geq e_j$ potom $U^n(x, y) = U^n(y, z_k) \in \{y, z_k\}$.*
(iv) *Ak $x \leq e_i$ a $y \geq e_j$ potom*

- $U^n(x, y) = z_k$, *ak* $U^n(x, z_k) = z_k$ *a* $U^n(y, z_k) = z_k$,
- $U^n(x, y) = x$, *ak* $U^n(x, z_k) = x$ *a* $U^n(y, z_k) = z_k$,
- $U^n(x, y) = y$, *ak* $U^n(x, z_k) = z_k$ *a* $U^n(y, z_k) = y$,
- $U^n(x, y) \in [x, e_i[\, \cup \{z_k\} \cup \,]e_j, y]$ *ak* $U^n(x, z_k) = x$ *a* $U^n(y, z_k) = y$.

V predchádzajúcich výsledkoch sme videli, že v jadre každej n-uninormy $U^n \in \mathcal{U}_n$ je n-uninorma U^n_* z Triedy 1, t.j. taká, že $U^n_*(0, 1) = z_k$ pre nejaké $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ (pozri Vety 4.28, 4.29), ktorá je so zvyškom spojená pomocou ordinálneho súčtu. Takáto n-uninorma z Triedy 1 má podobnú štruktúru ako jej špeciálny prípad – nullnorma, t.j. dá sa vyjadriť ako z-ordinálny súčet pologrupy definovanej na $[0, z_k]$ (ktorá je lineárnou transformáciou k-uninormy), pologrupy definovanej na $[z_k, 1]$ (ktorá je lineárnou transformáciou $(n-k)$-uninormy) a triviálnej pologrupy $(\{z_k\}, \mathrm{Id})$. Tým pádom už máme všetko pripravené na rozklad 2-uninoriem. Pre $n > 2$ potom použijeme indukciu. Vynecháme detaily a spomenieme len, že pre 2-uninormy z $\mathcal{U}_2$ pripomína čiastočné usporiadanie príslušného z-ordinálneho súčtu strom s dvoma vetvami a jedným uzlom (deliacim bodom), ktorý zodpovedá pologrupe $(\{z_1\}, \mathrm{Id})$. Pologrupy, ktoré sú v danom čiastočnom usporiadaní menšie ako $(\{z_1\}, \mathrm{Id})$ patria do rozkladu tej časti 2-uninormy, ktorá zostane ak sa odstráni z jadra príslušná 2-uninorma U^2_* z Triedy 1. Jedna vetva stromu zodpovedá prvej pridruženej uninorme 2-uninormy U^2_* a druhá vetva zodpovedá druhej pridruženej uninorme U^2_*.

Veta 4.40
Nech $U^2\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ je 2-uninorma, $U^2 \in \mathcal{U}_2$. Potom sa U^2 dá vyjadriť ako z-ordinálny súčet pologrúp z Definície 4.14 a triviálnych pologrúp, kde vetviaca množina A zodpovedá deliacemu bodu z_1 a $(C, \preceq)$ má štruktúru binárneho stromu.

Pre všeobecnú n-uninormu z $\mathcal{U}_n$ zodpovedá najmenší uzol (deliaci bod) z vetviacej množiny A, v príslušnom čiastočnom usporiadaní, deliacemu bodu $z_k = U^n(e_1, e_n)$. Podobne ako v prípade 2-uninoriem, aj tu pologrupy, ktoré sú menšie ako $(\{z_k\}, \mathrm{Id})$ patria do rozkladu tej časti n-uninormy, ktorá zostane ak sa odstráni z jadra príslušná n-uninorma U^n_* z Triedy 1. Nad $(\{z_k\}, \mathrm{Id})$ sú dve vetvy (ktoré sa môžu ešte ďalej vetviť), jedna zodpovedá lineárnej transformácii (zúženia) k-uninormy na interval $[x_0, z_k]$ ($]x_0, z_k]$) a druhá zodpovedá lineárnej transformácii (zúženia) $(n-k)$-uninormy na interval $[z_k, y_0]$ ($[z_k, y_0[$), kde x_0 a y_0 sú definované v (5) a (6).

Indukciou môžeme ďalej každú z týchto vetiev vyjadriť ako z-ordinálny súčet pologrúp z Definície 4.14 a triviálnych pologrúp.

Veta 4.41
Nech $U^n\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ je n-uninorma, $U^n \in \mathcal{U}_n$. Potom sa U^n dá vyjadriť ako z-ordinálny súčet pologrúp z Definície 4.14 a triviálnych pologrúp, kde vetviaca množina A zodpovedá uzlom (deliacim bodom) $z_1, \ldots, z_{n-1}$ a $(C, \preceq)$ má štruktúru binárneho stromu.

5 Závery práce

Hlavné závery práce môžeme zhrnúť do nasledovných bodov:

- Popísali sme všetky pologrupy, ktoré sa dajú použiť na konštrukciu uninoriem pomocou ordinálnych súčtov. Tieto pologrupy zahŕňajú uninormy a zovšeobecnené uninormy a pologrupy, ktoré z nich môžeme získať odtrhnutím jedného, alebo oboch koncových bodov (prípadne aj deliaceho bodu e).

- Zaviedli sme ordinálny súčet uninoriem a ukázali sme, že v prípade uninoriem treba časť pod neutrálnym prvkom a časť nad neutrálnym prvkom transformovať oddelene.

- Uninorma sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet reprezentovateľných a d-internálnych uninoriem vtedy a len vtedy ak sa jej množina bodov nespojitosti dá pokryť grafom ostro klesajúcej funkcie definovanej na jednotkovom intervale. Takáto uninorma sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet reprezentovateľných uninoriem ak má spočítateľnú množinu idempotentných bodov.

- Každá idempotentná uninorma sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet triviálnych pologrúp. V práci sme popísali aj zodpovedajúce úplné usporiadania, pomocou ktorých sa dá skonštruovať idempotentná uninorma ako ordinálny súčet triviálnych pologrúp.

- Pre každú uninormu so spojitými pridruženými funkciami sme ukázali, že jej množina bodov nespojitosti sa dá pokryť grafom symetrickej, u-surjektívnej, nerastúcej charakterizujúcej multi-funkcie. Opačný výsledok vo všeobecnosti neplatí, ale ak sa množina bodov nespojitosti uninormy dá pokryť grafom takejto charakterizujúcej multi-funkcie a navyše je uninorma v každom bode jednotkového štvorca buď zľava, alebo sprava spojitá (alebo spojitá) potom má spojité pridružené funkcie.

- Ukázali sme rozklad uninormy so spojitými pridruženými funkciami. Každá takáto uninorma sa dá vyjadriť ako ordinálny súčet Archimedovských, reprezentovateľných a idempotentných pologrúp.

- Podarilo sa nám ukázať podobnú charakterizáciu aj pre uninormy spojité na $[0,e[^2 \cup]e,1]^2$ za predpokladu, že jediná pologrupa v rozklade pridruženej t-normy (t-konormy) pomocou ordinálneho súčtu, ktorá nezodpovedá t-norme (t-konorme), t.j. je to t-subnorma (t-superkonorma), je kancelatívna.

- Zaviedli sme z-ordinálny súčet pologrúp, ktorý nám umožňuje konštruovať neklesajúce funkcie $F\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $F(0,0)=0$, $F(1,1)=1$, ktoré majú anihilátor vo vnútri jednotkového intervalu, pokým v prípade ordinálneho súčtu bol anihilátor takejto funkcie vždy len na jeho okrajoch, t.j. v 0 alebo v 1. Takto napríklad môžeme konštruovať nullnormy a n-uninormy.

- Každá idempotentná n-uninorma sa dá vyjadriť ako z-ordinálny súčet triviálnych pologrúp. V práci sme popísali aj zodpovedajúce čiastočné usporiadania, pomocou ktorých sa dá skonštruovať idempotentná n-uninorma ako z-ordinálny súčet triviálnych pologrúp.

- Ukázali sme, že v jadre každej n-uninormy so spojitými pridruženými funkciami je n-uninorma z Triedy 1, ktorá je so zvyškom spojená pomocou ordinálneho súčtu.

- Pre každú n-uninormu so spojitými pridruženými funkciami sme ukázali, že ak $U^n(x,y_1) = U^n(x,y_2) = e_i$ pre nejaké $x, y_1, y_2 \in [0,1]$, $y_1 < y_2$ a $i \in \{1,\ldots,n\}$ potom sa rád uninormy dá zredukovať. Množinu bodov nespojitosti každej redukovanej n-uninormy so spojitými pridruženými funkciami vieme pokryť grafmi n symetrických, u-surjektívnych, nerastúcich charakterizujúcich multi-funkcií, ktoré súvisia s lokálnymi neutrálnymi bodmi e_i. Opačný výsledok vo všeobecnosti neplatí, ale ak sa množina bodov nespojitosti n-uninormy dá pokryť grafmi takýchto charakterizujúcich multi-funkcií a navyše je n-uninorma v každom bode jednotkového štvorca, ktorý je pokrytý grafom iba jednej charakterizujúcej multi-funkcie, buď zľava, alebo sprava spojitá (alebo spojitá) potom má spojité pridružené funkcie.

- Ukázali sme rozklad n-uninormy so spojitými pridruženými funkciami. Každá takáto n-uninorma sa dá vyjadriť ako z-ordinálny súčet Archimedovských, reprezentovateľných a idempotentných pologrúp, pričom vetviaca množina A zodpovedá deliacim bodom $z_1, \ldots, z_{n-1}$ a $(C, \preceq)$ má štruktúru binárneho stromu.

Kompletná charakterizácia (spojitých) t-noriem je dôležitý výsledok, ktorý uľahčuje náhľad na štruktúru inferenčného aparátu používaného v mnohých aplikáciách, medzi iným aj v probabilistických metrických priestoroch, či v prípade neaditívnych mier a integrálov, ktoré v zovšeobecnenej teórii pravdepodobnosti umožňujú modelovanie interakcie pri výpočte strednej hodnoty. V prípade neaditívnych integrálov t-normy a im príbuzné operácie nahrádzajú štandardné násobenie. Ďalšími takýmito operáciami sú uninormy, ktoré sú skúmané v tejto doktorskej dizertačnej práci. Hlavnou prednosťou uninoriem je ich využitie v prípade práce na bipolárnej škále. Z pohľadu aplikácií je asi najzaujímavejšia trieda uninoriem so spojitými pridruženými funkciami, nakoľko je dostatočne široká, pričom si zároveň zachováva dostatočne pekné vlastnosti. Preto tejto triede venovalo pozornosť veľa autorov, ale dosiahnuté výsledky zahŕňali len špeciálne prípady. Kompletná charakterizácia tejto triedy uninoriem bola popísaná až v článkoch, ktoré sú súčasťou tejto doktorskej dizertačnej práce.

Pri ďalšom rozširovaní bipolárnej škály sa dostávame k prístupu, kde príslušná binárna funkcia v danom neaditívnom integráli má odlišné vlastnosti v závislosti na konkrétnej podoblasti jednotkového štvorca, t.j. vstupné hodnoty sú rozdelené na tzv. referenčné úrovne (kategórie). Tento prístup nás privádza k n-uninormám, ktoré zovšeobecňujú uninormy a v prípade spojitých pridružených funkcií sú tiež kompletne charakterizované v tejto práci. Podobne ako v prípade uninoriem, doposiaľ boli charakterizované iba špeciálne prípady. Táto doktorská dizertačná práca teda prispieva k rozvoju zovšeobecnenej teórie pravdepodobnosti, konkrétne k rozvoju znalostí o neaditívnych mierach a integráloch, ktoré modelujú strednú hodnotu v prípade interakcie.

Literatúra

[1] P. Akella (2007). Structure of n-uninorms. Fuzzy Sets and Systems 158(15), pp. 1631–1651.

[2] P. Akella (2009). C-sets of n-uninorms. Fuzzy Sets and Systems 160(1), pp. 1–21.

[3] C. Alsina , M. J. Frank, B. Schweizer (2006). Associative Functions: Triangular Norms and Copulas, World Scientific, Singapore.

[4] B. de Baets (1998). Idempotent uninorms. European Journal of Operational Research 118, pp. 631–642.

[5] T. Calvo, B. de Baets, J. Fodor (2001). The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms. Fuzzy Sets and Systems 120(3), pp. 385–394.

[6] A. H. Clifford (1954). Naturally totally ordered commutative semigroups. American Journal of Mathematics 76, pp. 631—646.

[7] E. Czogala, J. Drewniak (1984). Associative monotonic operations in fuzzy set theory. Fuzzy Sets and Systems 12, pp. 249–269.

[8] P. Drygas (2010). On properties of uninorms with underlying t-norm and t-conorm given as ordinal sums. Fuzzy Sets and Systems 161(2), pp. 149–157.

[9] P. Drygas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens (2016). A characterization of a class of uninorms with continuous underlying operators. Fuzzy Sets and Systems 287, pp. 137-–153.

[10] J. C. Fodor, R. R. Yager, A. Rybalov (1997). Structure of uninorms. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems 5, pp. 411–427.

[11] J. Fodor, B. de Baets (2012). A single-point characterization of representable uninorms. Fuzzy Sets and Systems 202, pp. 89—99.

[12] J. Golan (1992). The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 54, Longman Scientific and Technical.

[13] M. Grabisch, C. Labreuche (2003). Capacities on lattices and k-ary capacities. In: Proc. of EUSFLAT 2003, Zittau, Germany, pp. 304—307.

[14] M. Grabisch, J.–L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap (2009). Aggregation Functions, Cambridge University Press.

[15] B. Jayaram, M. Baczyński, R. Mesiar (2011). R-implications and the Exchange Principle: A Complete Characterization. In: Proc. of EUSFLAT-2011 and LFA-2011, Galichet, S., Montero, J., Mauris, G. (eds.), Aix-les-Bains, France, pp. 223–229.

[16] S. Jenei (2001). Structure of left-continuous triangular norms with strong induced negations (II) Rotation-annihilation construction. Journal of Applied Non-Classical Logics 11, pp. 351–366.

[17] S. Jenei (2002). A note on the ordinal sum theorem and its consequence for the construction of triangular norms. Fuzzy Sets and Systems 126, pp. 199–205.

[18] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap (2000). Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[19] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap (2000). Integration with respect to decomposable measures, based on a conditionally distributive semiring on the unit interval. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 8, pp. 701–717.

[20] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap (2002). Triangular norms as ordinal sums of semigroups in the sense of A. H. Clifford. Semigroup Forum 65(1), pp. 71–82.

[21] G. Li, H.W. Liu, J. Fodor (2014). Single-point characterization of uninorms with nilpotent underlying t-norm and t-conorm. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 22, pp. 591–604.

[22] G. Li, H-W. Liu (2016). Distributivity and conditional distributivity of a uninorm with continuous underlying operators over a continuous t-conorm. Fuzzy Sets and Systems 287, pp. 154–171.

[23] C. M. Ling (1965). Representation of associative functions. Publicationes Mathematicae Debrecen 12, pp. 189–212.

[24] H.-W. Liu (2015). Distributivity and conditional distributivity of semi-uninorms over continuous t-conorms and t-norms. Fuzzy Sets and Systems 268, pp. 27–43.

[25] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens (1999). T-Operators. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 7(1), pp. 31–50.

[26] J. Martín, G. Mayor and J. Torrens (2003). On locally internal monotonic operations. Fuzzy Sets and Systems 137, pp. 27–42.

[27] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens (2002). The distributivity condition for uninorms and t-operators. Fuzzy Sets and Systems 128(2), pp. 209–225.

[28] K. Menger (1942). Statistical metrics. Proc. of the National Academy of Sciences of U.S.A. 8, pp. 535–537.

[29] A. Mesiarová (2004). Continuous triangular subnorms. Fuzzy Sets and Systems 142, pp. 75–83.

[30] A. Mesiarová-Zemánková (2015). Multi-polar t-conorms and uninorms. Information Sciences 301, pp. 227–240.

[31] E. Pap (1990). An integral generated by decomposable measure. Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 20 (1) pp. 135–144.

[32] M. Petrík, R. Mesiar (2014). On the structure of special classes of uninorms. Fuzzy Sets and Systems 240, pp. 22–38.

[33] D. Ruiz, J. Torrens (2006). Distributivity and conditional distributivity of a uninorm and a continuous t-conorm. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14(2), pp. 180–190.

[34] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. de Baets, J. Fodor (2010). Some remarks on the characterization of idempotent uninorms. In: Proc. of IPMU 2010, Hüllermeier, E., Kruse, R., Hoffmann, F. (eds.), Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design, LNAI 6178, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 425–434.

[35] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens (2015). A characterziation of discrete uninorms having smooth underlying operators, Fuzzy Sets and Systems 268, pp. 44—58.

[36] B. Schweizer, A. Sklar (1983). Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, New York.

[37] M. Sugeno, T. Murofushi (1987). Pseudo-additive measures and integrals. Journal of Mathematical Analysis and Applications 122, pp. 197–222.

[38] F. Sun, X.–P. Wang, X.–B. Qu (2017). Uni-nullnorms and null-uninorms. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 32, pp. 1969–1981.

[39] F. Sun, X.–P. Wang, X.–B. Qu (2018). Characterizations of uni-nullnorms with continuous Archimedean underlying t-norms and t-conorms. Fuzzy Sets and Systems 334, pp. 24–35.

[40] R. R. Yager, A. Rybalov (1996). Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems 80, pp. 111—120.

[41] R. R. Yager, A. Rybalov (2011). Bipolar aggregation using the uninorms. Fuzzy Optimization and Decision Making 10, pp. 59–70.

[42] W. Zong, Y. Su, H.–W. Liu, B. de Baets (2018). On the structure of 2-uninorms. Information Sciences 467, pp. 506–527.

6 Zoznam prác a ich ohlas

Zoznam použitých článkov (s citáciami podľa WOS/Scopus)

[UNI1] A. Mesiarová-Zemánková (2016). A note on decomposition of idempotent uninorms into an ordinal sum of singleton semigroups. Fuzzy Sets and Systems 299, pp. 140–145.

[1] Li, G., Liu, H.-W. (2021). On a characterization of representable uninorms. Fuzzy Sets and Systems 408, pp. 57–64.

[2] Zong, W.W., Su, Y., Liu, H.-W.; De Baets, B. (2020). On the construction of uninorms by paving. International Journal of Approximate Reasoning 118, pp. 96–111.

[3] Mesiar, R., Kolesárová, A., Gomez, D., Montero, J. (2019). Set-based extended aggregation functions. International Journal of Intelligent Systems 34(9), pp. 2039–2054.

[4] Cayli, G., Karacal, F., Mesiar, R. (2019). On internal and locally internal uninorms on bounded lattices. International Journal of General Systems 48(3), pp. 235–259.

[5] Cayli, G. (2019). On Properties of Internal Uninorms on Bounded Lattices. In: New Trends in Aggregation Theory, AGOP 2019, Halaš R., Gagolewski M., Mesiar R. (eds), Advances in Intelligent Systems and Computing, 981. Springer, pp. 115–128.

[6] Devillet, J., Kiss, G., Marichal, J.L. (2019). On Idempotent n-ary Uninorms. In: Modeling Decisions for Artificial Intelligence, MDAI 2019, Lecture Notes in Computer Science 11676 LNAI, Torra V., Narukawa Y., Pasi G., Viviani M. (eds), Springer, pp. 98–104.

[7] Mesiar, R., Kolesárová, A., Šeliga, A., Montero, J., Gómez, D. (2019). Set-Based Extended Functions. In: Modeling Decisions for Artificial Intelligence, MDAI 2019, Lecture Notes in Computer Science 11676 LNAI, Torra V., Narukawa Y., Pasi G., Viviani M. (eds), Springer, 41–51.

[8] Paternain, D., Campion, M., Mesiar, R., Perfilieva, I., Bustince, H. (2018). Internal Fusion Functions. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 26(2), pp. 487–503.

[9] Couceiro, M., Devillet, J., Marichal, J.L. (2018). Characterizations of idempotent discrete uninorms. Fuzzy Sets and Systems 334, pp. 60–72.

[10] Zong, W., Su, Y., Liu, H.W., De Baets, B. (2018). On the Construction of Associative, Commutative and Increasing Operations by Paving. In: Aggregation Functions in Theory and in Practice, AGOP 2017, Torra V., Mesiar R., Baets B. (eds), Advances in Intelligent Systems and Computing 581, Springer, pp. 229–240.

[UNI2] A. Mesiarová-Zemánková (2016). Ordinal sum construction for uninorms and generalized uninorms. International Journal of Approximate Reasoning 76, pp. 1–17.

[1] Zhou, H. (2021). Two General Construction Ways Toward Unified Framework of Ordinal Sums of Fuzzy Implications. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 29(4),8957461, pp. 846–860.

[2] Dvořák, A., Holčapek, M. (2020). New construction of an ordinal sum of t-norms and t-conorms on bounded lattices. Information Sciences 515, pp. 116–131.

[3] Zong, W.W., Su, Y., Liu, H.-W., De Baets, B. (2020). On the construction of uninorms by paving. International Journal of Approximate Reasoning 118, pp. 96–111.

[4] Lima, A., Bedregal, B., Mezzomo, I. (2020). Ordinal sums of the main classes of fuzzy negations and the natural negations of t-norms, t-conorms and fuzzy implications. International Journal of Approximate Reasoning 116, pp. 19–32.

[5] Mezzomo, I., Frazao, H., Bedregal, B., Da Silva Menezes, M. (2020). On the dominance relation between ordinal sums of quasi-overlap functions. In: Proc. of IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), Glasgow, United Kingdom, 2020, pp. 1–7.

[6] Cayli, G. (2019). New methods to construct uninorms on bounded lattices. International Journal of Approximate Reasoning 115, pp. 254–264.

[7] Su, Y., Zong, W., Drygas, P. (2019). Properties of uninorms with the underlying operations given as ordinal sums. Fuzzy Sets and Systems 357, pp. 47–57.

[8] Kesicioglu, M. N. (2019). Construction Methods for Implications on Bounded Lattices. Kybernetika 55(4), pp. 641-667.

[9] Campion, M.J., Catalan, R.G., Indurain, E., Lizasoain, I, Raventos-Pujol, A., Valero, O. (2018). Geometrical aggregation of finite fuzzy sets. International Journal of Approximate Reasoning 103, pp. 248–266.

[10] Zong, W., Su, Y., Liu, H.W., De Baets, B. (2018). On the Construction of Associative, Commutative and Increasing Operations by Paving. In: Aggregation Functions in Theory and in Practice, AGOP 2017, Torra V., Mesiar R., Baets B. (eds), Advances in Intelligent Systems and Computing 581, Springer, pp. 229–240.

[UNI3] A. Mesiarová-Zemánková (2017). Ordinal sums of representable uninorms. Fuzzy Sets and Systems 308, pp. 42–53.

[1] Asici, E., Mesiar, R. (2021). On the construction of uninorms on bounded lattices. Fuzzy Sets and Systems 408, pp. 65–85.

[2] Zong, W.W., Su, Y., Liu, H.-W., De Baets, B. (2020). On the construction of uninorms by paving. International Journal of Approximate Reasoning 118, pp. 96–111.

[3] Kesicioglu, M. N. (2019). Construction Methods for Implications on Bounded Lattices. Kybernetika 55(4), pp. 641–667.

[4] Cayli, G., Karacal, F., Mesiar, R. (2019). On internal and locally internal uninorms on bounded lattices. International Journal of General Systems 48(3), pp. 235–259.

[5] Zong, W., Su, Y., Liu, H.W., De Baets, B. (2018). On the Construction of Associative, Commutative and Increasing Operations by Paving. In: Aggregation Functions in Theory and in Practice, AGOP 2017, Torra V., Mesiar R., Baets B. (eds), Advances in Intelligent Systems and Computing 581, Springer, pp. 229–240.

[UNI4] A. Mesiarová-Zemánková (2017). Characterization of uninorms with continuous underlying t-norm and t-conorm by means of the ordinal sum construction. International Journal of Approximate Reasoning 83, pp. 176–192.

[1] Zhang, H.-P., Wu, M., Wang Z., Ouyang, Y., De Baets, B. A characterization of the classes Umin and Umax of uninorms on a bounded lattice. Fuzzy Sets and Systems, `https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.10.016`

[2] Zhang, T.-H., Qin, F., Liu, H.-W., Wang, Y.-M. Modularity conditions between overlap (grouping) function and uni-nullnorm or null-uninorm. Fuzzy Sets and Systems, `https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.08.018`

[3] Lima, A., Bedregal, B., Mezzomo, I. (2020). Ordinal sums of the main classes of fuzzy negations and the natural negations of t-norms, t-conorms and fuzzy implications. International Journal of Approximate Reasoning 116, pp. 19–32.

[4] Mezzomo, I., Frazao, H., Bedregal, B., Da Silva Menezes, M. (2020). On the dominance relation between ordinal sums of quasi-overlap functions. In: Proc. of IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), Glasgow, United Kingdom, pp. 1–7.

[5] Drygas, P., Bazan, J.G., Pusz, P., Knap, M. (2019). Application of uninorms to aggregate uncertainty from many classifiers. Open Access. Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems 13(4), pp. 85–90.

[6] Cayli, G. (2019). New methods to construct uninorms on bounded lattices. International Journal of Approximate Reasoning 115, pp. 254–264.

[7] Su, Y., Zong, W., Drygas, P. (2019). Properties of uninorms with the underlying operations given as ordinal sums. Fuzzy Sets and Systems 357, pp. 47–57.

[8] Li, G., Liu, H.W. (2018). On properties of uninorms locally internal on the boundary. Fuzzy Sets and Systems 332, pp. 116–128.

[9] Fernández-Peralta, R., Massanet, S. (2018). On the Characterization of a Family of Generalized Yager's Implications. In: Proc. of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems: Theory and Foundations, IPMU 2018, pp. 636–648.

[10] Li, G. (2018). On a Special Class of Left-Continuous Uninorms. Kybernetika 54(3), pp. 427–442.

[UNI5] A. Mesiarová-Zemánková (2018). Characterization of uninorms with continuous underlying t-norm and t-conorm by their set of discontinuity points. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 26(2), pp. 705–714.

[1] Li, W.-H., Qin, F. Migrativity equation for uninorms with continuous underlying operators. Fuzzy Sets and Systems, `https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.08.007`

[2] Zhang, T.-H., Qin, F., Liu, H.-W., Wang, Y.-M. Modularity conditions between overlap (grouping) function and uni-nullnorm or null-uninorm. Fuzzy Sets and Systems, `https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.08.018`

[3] Li, W.-H., Qin, F. (2021). On the cross-migrativity of uninorms revisited. International Journal of Approximate Reasoning 130, pp. 246–258.

[4] Li, G., Liu, H.-W. (2021) On a characterization of representable uninorms. Fuzzy Sets and Systems 408, pp. 57–64.

[5] Su, Y., Qin, F., Zhao, B. (2021). On the inner structure of uninorms with continuous underlying operators. Fuzzy Sets and Systems 403, pp. 1–9.

[6] Li, W.-H., Qin, F., Zhao, Y.-Y. (2020). A note on uninorms with continuous underlying operators. Fuzzy Sets and Systems 386, pp. 36–47.

[7] Jenei, S. (2020). Group-Like Uninorms. International Journal of Computational Intelligence Systems 13(1), pp. 954–965.

[8] Su, Y., Zong, W., Drygas, P. (2019). Properties of uninorms with the underlying operations given as ordinal sums. Fuzzy Sets and Systems 357, pp. 47–57.

[9] Jenei, S. (2019). A New Class of Uninorm Aggregation Operations for Fuzzy Theory. In: Artificial Intelligence and Soft Computing, ICAISC 2019, Rutkowski L., Scherer R., Korytkowski M., Pedrycz W., Tadeusiewicz R., Zurada J. (eds), Lecture Notes in Computer Science 11508. Springer, pp. 296–303.

[10] Li, G., Li, Z. (2019). On a class of left-continuous uninorms constructed from the representable uninorm. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 36(6), pp. 6653–6661.

[11] Li, G., Liu, H.W. (2018). On properties of uninorms locally internal on the boundary. Fuzzy Sets and Systems 332, pp. 116–128.

[12] Li, G, Liu H.W. (2018). A note on "Distributivity and conditional distributivity of a uninorm with continuous underlying operators over a continuous t-conorms". Fuzzy Sets and Systems 334, pp. 126–131.

[13] Li, G. (2018). On a Special Class of Left-Continuous Uninorms. Kybernetika 54(3), pp. 427–442.

[14] Li, G., Ren, Y., Yang, Q. (2017). On a class of conjunctive left-continuous uninorms. In: Proc. of 13th International Conference on Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (ICNC-FSKD) 2017, pp. 1148–1151.

[15] Li, G., Li, Z., Ren, Y., Yang, Q., Liu, H.W. (2017). On a Class of Uninorms of Which The Underlying Operators are Involutive and Left-continuous. In: Proc. of 12th International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (IEEE ISKE) 2017.

[UNI6] A. Mesiarová-Zemánková (2018). Characterizing set-valued functions of uninorms with continuous underlying t-norm and t-conorm. Fuzzy Sets and Systems 334, pp. 83–93.

[1] Li, W.-H., Qin, F. Migrativity equation for uninorms with continuous underlying operators. Fuzzy Sets and Systems, `https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.08.007`

[2] Su, Y., Qin, F., Zhao, B. (2021). On the inner structure of uninorms with continuous underlying operators. Fuzzy Sets and Systems 403, pp. 1–9.

[3] Dan, Y.X., Hu, B.Q., Qiao, J. (2020). New construction of t-norms and t-conorms on bounded lattices. Fuzzy Sets and Systems 395, pp. 40–70.

[4] Li, W.-H., Qin, F., Zhao, Y.-Y. (2020). A note on uninorms with continuous underlying operators. Fuzzy Sets and Systems 386, pp. 36–47.

[5] Jenei, S. (2020). Group-Like Uninorms. International Journal of Computational Intelligence Systems 13(1), pp. 954–965.

[6] Dan, Y., Hu, B., Qiao, J. (2019). New constructions of uninorms on bounded lattices. International Journal of Approximate Reasoning 110, pp. 185–209.

[7] Jenei, S. (2019). A New Class of Uninorm Aggregation Operations for Fuzzy Theory. In: Artificial Intelligence and Soft Computing, ICAISC 2019, Rutkowski L., Scherer R., Korytkowski M., Pedrycz W., Tadeusiewicz R., Zurada J. (eds), Lecture Notes in Computer Science 11508. Springer, pp. 296–303.

[UNI7] A. Mesiarová-Zemánková (2017). Uninorms continuous on $[0,e[^2 \cup]e,1]^2$. Information Sciences 393, pp. 130–143.

[1] Sun, X.-R., Liu, H.-W. Further characterization of uninorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems `https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.01.006`

[2] Cayli, G. (2020). Uninorms on bounded lattices with the underlying t-norms and t-conorms. Fuzzy Sets and Systems 395, pp. 107–129.

[3] Cayli, G. (2019). Alternative approaches for generating uninorms on bounded lattices. Information Sciences 488, pp. 111–139.

[4] Dan, Y., Hu, B., Qiao, J. (2019). New constructions of uninorms on bounded lattices. International Journal of Approximate Reasoning 110, pp. 185–209.

[5] Su, Y., Zong, W., Drygas, P. (2019). Properties of uninorms with the underlying operations given as ordinal sums. Fuzzy Sets and Systems 357, pp. 47–57.

[NUN1] A. Mesiarová-Zemánková, Characterization of idempotent n-uninorms, Fuzzy Sets and Systems, `https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.12.019`

[NUN2] A. Mesiarová-Zemánková (2021). The n-uninorms with continuous underlying t-norms and t-conorms. International Journal of General Systems 50(1), pp. 92–116.

[NUN3] A. Mesiarová-Zemánková, Characterizing functions of n-uninorms with continuous underlying functions, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, `https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2021.3057231`

[NUNI4] A. Mesiarová-Zemánková (2021). Characterization of n-uninorms with continuous underlying functions via z-ordinal sum construction, International Journal of Approximate Reasoning 133, pp. 60–79.

Spolu **62** citácií v databázach WOS/Scopus.

Zoznam ostatných prác, súvisiacich s problematikou (s citáciami podľa WOS/Scopus)

[1] A. Mesiarová, Continuous triangular subnorms, Fuzzy Sets and Systems 142 (2004), 75–83 (30 citácií).

[2] R. Mesiar, A. Mesiarová-Zemánková, Convex combinations of continuous t-norms with the same diagonal function, J. Nonlinear Analysis 69 (2008), 2851–2856 (16 citácií).

[3] K.C. Maes, A. Mesiarová-Zemánková, Cancellativity properties for t-norms and t-subnorms, Information Sciences 179 (2009), 1221–1233 (14 citácií).

[4] A. Mesiarová-Zemánková, Multi-polar t-conorms and uninorms. Information Sciences 301 (2015), 227–240 (21 citácií).

[5] A. Mesiarová-Zemánková, Structure of Uninorms with Continuous Diagonal Functions. V: On Logical, Algebraic, and Probabilistic Aspects of Fuzzy Set Theory (S. Saminger, R. Mesiar, eds.), Knižná séria: Studies in Fuzziness and Soft Computing 336, Springer, 2016, pp. 109–135 (0 citácií).

[6] A. Mesiarová-Zemánková, Natural partial order induced by a commutative, associative and idempotent function, Information Sciences 545 (2021), 499–512 (0 citácií).

[7] A. Mesiarová-Zemánková, Convex combinations of uninorms and triangular subnorms, Fuzzy Sets and Systems, https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.10.011 (0 citácií).

7 The structure of uninorms with continuous underlying triangular norms and conorms and their generalizations

The classes of t-norms and t-conorms are prominent examples of associative functions on the unit interval. Generalization of the position of the neutral element or the annihilator of a t-norm yielded the definition of uninorms and nullnorms, which can be taken as bipolar t-norms and t-conorms. Further generalization which brings together uninorms and nullnorms are n-uninorms which generalize uninorms in such a way that the global neutral element is replaced by n local neutral elements. Thus in the case of n-uninorms on distinct subareas of the unit square different uninorms can be applied.

The characterization of all continuous t-norms (t-conorms) is based on two construction methods. The first result shows that each continuous t-norm (t-conorm) is equal to an ordinal sum of continuous Archimedean t-norms (t-conorms). The second result shows that each continuous Archimedean t-norm (t-conorm) has a continuous additive generator. While the concept of an additive generator was easily introduced also for uninorms and yields representable uninorms, generalization of the ordinal sum construction for uninorms was not so evident. The results known so far were based merely on the ordinal sum decomposition of underlying functions of uninorms and not uninorms themselves.

The aim of this work is to introduce ordinal sum of uninorms, to introduce z-ordinal sum construction which extends the Clifford's ordinal sum to partially ordered families of semigroups, and using these concepts to offer a complete characterization of uninorms and n-uninorms with continuous underlying functions. Particularly, we study their continuity on the whole unit square and their decomposition into irreducible sets via the ordinal sum (z-ordinal sum) construction. The tasks solved in this thesis are the following:

- Definition of the ordinal sum construction for uninorms.

- Description of semigroups that yield a uninorm via the ordinal sum construction.

- The one-to-one correspondence between idempotent uninorms and special linear orders on the unit interval is shown.

- The characterizing set-valued function of a uninorm with continuous underlying functions is defined and its relation to the set of points of discontinuity of the given uninorm is shown.

- It is shown that each uninorm with continuous underlying functions can be expressed as an ordinal sum of semigroups related to continuous Archimedean t-norms, t-conorms, representable uninorms and idempotent semigroups.

- Definition of the z-ordinal sum construction for partially ordered families of semigroups.

- The one-to-one correspondence between idempotent n-uninorms and special partial orders on the unit interval is shown.

- The characterizing (set-valued) functions of an n-uninorm with continuous underlying functions are defined and their relation to the set of points of discontinuity of the given n-uninorm is shown.

- It is shown that each n-uninorm with continuous underlying functions can be expressed as a z-ordinal sum of semigroups related to continuous Archimedean t-norms, t-conorms, representable uninorms and idempotent semigroups.

8 Die Struktur von Uninormen mit zugrundeliegenden stetigen t-Normen und t-Conormen und ihrer Verallgemeinerungen

Die Klassen von t-Normen und t-Conormen sind herausragende Beispiele für assoziative Funktionen im Einheitsintervall. Die Verallgemeinerung der Position des neutralen Elements oder des Nullelements einer t-Norm führte zur Definition von Uninormen und Nullnormen, die als bipolare t-Normen und t-Conormen angesehen werden können. Eine weitere Verallgemeinerung, die Uninormen und Nullnormen verbindet, sind n-Uninormen, bei denen das globale neutrale Element durch n lokale neutrale Elemente ersetzt wird. Somit können im Fall von n-Uninormen auf verschiedenen Teilbereichen des Einheitsquadrats unterschiedliche Uninormen betrachtet werden.

Die Charakterisierung aller stetigen t-Normen (t-Conormen) basiert auf zwei Konstruktionen. Einerseits entspricht jede stetige t-Norm (t-Conorm) einer Ordinalsumme stetiger archimedischer t-Normen (t-Conormen), und andererseits besitzt jede stetige archimedische t-Norm (t-Conorm) einen stetigen additiven Generator. Während das Konzept eines additiven Generators auch für Uninormen leicht eingeführt werden kann und repräsentierbare Uninormen liefert, war eine Verallgemeinerung der Ordinalsummenkonstruktion für Uninormen nicht so offensichtlich. Die bisher bekannten Ergebnisse basierten lediglich auf der Ordinalsummenzerlegung der zugrundeliegenden Funktionen und nicht der Uninormen selbst.

Das Ziel dieser Doktorarbeit war es, eine Ordinalsumme von Uninormen einzuführen, z-Ordinalsummenkonstruktion, die die Ordinalsumme von Clifford auf partiell geordnete Familien von Halbgruppen erweitert einzuführen, und diese Konzepte zu verwenden, um eine vollständige Charakterisierung von Uninormen und n-Uninormen mit zugrundeliegenden stetigen Funktionen zu erhalten. Insbesondere untersuchen wir ihre Stetigkeit auf dem gesamten Einheitsquadrat und ihre Zerlegung in irreduzible Mengen über die Konstruktion der Ordinalsumme (z-Ordinalsumme). Folgende Probleme wurden in dieser Doktorarbeit behandelt und gelöst:

- Definition der Ordinalsummenkonstruktion für Uninormen.
- Beschreibung von Halbgruppen, die über die Ordinalsummenkonstruktion eine Uninorm ergeben.
- Die Existenz einer bijektiven Beziehung zwischen idempotenten Uninormen und speziellen linearen Ordnungen im Einheitsintervall wird bewiesen.
- Die charakterisierende mengenwertige Funktion einer Uninorm mit zugrundeliegenden stetigen Funktionen wird definiert und ihre Beziehung zur Menge der Unstetigkeitspunkte der gegebenen Uninorm wird untersucht.
- Es wird gezeigt, dass jede Uninorm mit zugrundeliegenden stetigen Funktionen als eine Ordinalsumme von Halbgruppen dargestellt werden kann, die sich auf stetige ar-

chimedische t-Normen, t-Conormen, repräsentierbare Uninormen und idempotente Halbgruppen beziehen.

- Definition der z-Ordinalsummenkonstruktion für partiell geordnete Familien von Halbgruppen.
- Die Existenz einer bijektiven Beziehung zwischen idempotenten n-Uninormen und speziellen Teilordnungen im Einheitsintervall wird bewiesen.
- Die charakterisierenden (mengenwertigen) Funktionen einer n-Uninorm mit zugrundeliegenden stetigen Funktionen werden definiert und ihre Beziehung zur Menge der Unstetigkeitspunkte der gegebenen n-Uninorm wird untersucht.
- Es wird gezeigt, dass jede n-Uninorm mit zugrundeliegenden stetigen Funktionen als z-Ordinalsumme von Halbgruppen dargestellt werden kann, die sich auf stetige archimedische t-Normen, t-Conormen, repräsentierbare Uninormen und idempotente Halbgruppen beziehen.