UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Dušana Babicová

Autoreferát dizertačnej práce

Neurčitosť, štruktúry a kategórie

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:

9.1.9 aplikovaná matematika

Bratislava, 2020

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Matematickom ústave Slovenskej akadémie vied, detašovanom pracovisku v Košiciach.

Predkladateľ:	Mgr. Dušana Babicová Matematický ústav Slovenská akadémia vied Grešákova 6 040 01 Košice
Školiteľ:	doc. RNDr. Roman Frič, DrSc. Matematický ústav Slovenská akadémia vied Grešákova 6 040 01 Košice
Školiteľ špecialista:	doc. PaedDr. Martin Papčo, PhD. Katedra matematiky Pedagogická fakulta Katolícka univerzita v Ružomberku Hrabovská cesta 1 034 01 Ružomberok

Študijný odbor: 9.1.9 aplikovaná matematika

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina F1
842 48 Bratislava

Autoreferát dizertačnej práce

Úvod

Je možné konzistentne a efektívne matematicky uchopiť neurčitosť? Azda už tu sa hodí *neurčitá* – možno povedať fuzzy alebo dokonca aj kvantová – odpoveď: áno aj nie. Moja dizertačná práca je snahou prispieť k pozitívnej odpovedi na ňu.

Dizertačná práca NEURČITOSŤ, ŠTRUKTÚRY A KATEGÓRIE sa venuje zovšeobecnenej teórii pravdepodobnosti, v ktorej je klasický pravdepodobnostný priestor (pozri [20]) nahradený zovšeobecneným pravdepodobnostným priestorom. Ambíciou zovšeobecnenej teórie pravdepodobnosti je do modelu zahrnúť okrem aspektu náhodnosti aj fuzzy aspekt, čím možno na skúmaný jav poskytnúť komplexnejší pohľad. Ide vlastne o jednu z reflexií na návrh L. Zadeha (pozri [31]). V teórii figurujú zovšeobecnené náhodné udalosti z množiny $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ všetkých $\mathbf{A}$-merateľných funkcií do jednotkového intervalu, ktorých miera je určená pravdepodobnostným intergrálom (vzhľadom k pravdepodobnostnej miere), pričom $\mathbf{A}$ je σ-pole množín. Literatúra týkajúca sa zovšeobecnenej teórie pravdepodobnosti je rozsiahla, k tejto téme existuje mnoho rôznych prístupov, často s paralelnými výsledkami. Lenže pri opisovaní používaných štruktúr a ich vzájomných vzťahov sa často zachádza do detailov (napr. [9], [17], [24]) a s narastajúcim množstvom informácií sa vlastne zneviditeľňuje podstata. Preto R. Frič a M. Papčo boli presvedčení, že kategoriálny prístup k danej problematike by umožnil dať podstatnú časť výsledkov do perspektívy a zorientovať sa v nich vďaka unifikujúcej teórii, v ktorej kolmogorovovská klasika figuruje ako špeciálny prípad. Z hľadiska metodického prístupu dizertačná práca pokračuje v duchu kategoriálneho prístupu R. Friča a M. Papča k zovšeobecnenej teórii pravdepodobnosti (pozri [13], [16], [14]). Na rozdiel od ich modelovania náhodných udalostí prostredníctvom D-posetov (pozri [7], [22]) fuzzy podmnožín univerza, v tejto práci sú na takýto účel využívané A-posety, zavedené V. Skřivánkom (pozri [29]). Časť výsledkov možno považovať za reformuláciu tvrdení spomínaných autorov práve v jazyku A-posetov. Vzhľadom na istú pridanú hodnotu takéhoto prístupu jazyk A-posetov je uplatnený aj v nových tvrdeniach. Súčasnou ambíciou je ukázať, že teória kategórií (pozri [1]), jej postupy a konštrukcie sú vhodnými nástrojmi na skúmanie zovšeobecnej (fuzzy) teórie pravdepodobnosti a umožňujú ju dať do kontextuálneho rámca s inými modelmi pravdepodobnosti.

To môže pomôcť nielen nájsť dostatočný argument odôvodňujúci Zadehovo poňatie (pozri [31]), ale aj v snahe predstaviť ucelenejší matematický prístup k neurčitosti a pravdepodobnosti (pozri [28], [26]).

Dizertačná práca sa delí na štyri kapitoly:

Prvá kapitola je priblížením matematického chápania neurčitosti v minulosti a dnes. V druhej kapitole čitateľ nájde teoretické východiská dizertačnej práce. Ide najmä o základné pojmy z fuzzy logiky a teórie kategórií a vysvetlenie zovšeobecnej teórie pravdepodobnosti, ako aj výsledky autorov, ktorí túto tému skúmali predo mnou a v ktorých práci pokračujem. Zámerom ďalších dvoch kapitol je predstaviť dosiahnuté výsledky, ktoré boli aj publikované v dvoch článkov, ktorých kópie sú priložené na konci práce (pozri [2], [3]). V tretej kapitole vysvetľujem, prečo je pravdepodobnostný integrál vhodným a prirodzeným rozšírením pravdepodobnostnej miery. Ide najmä o opis komplexného dôvodu založeného na kategoriálnom prístupe k pravdepodobnosti a uplatňovanie prirodzenej požiadavky lepšieho rozhodovania o neurčitých javoch. Štvrtá kapitola je venovaná zovšeobecneniu stochastickej (ne)závislosti a podmienej pravdepodobnosti.

Ciele

Hlavným cieľom dizertačnej práce bolo prispieť k vybudovaniu súvislej zovšeobecnenej teórie pravdepodobnosti v jazyku A-posetov pomocou elementárnych metód teórie kategórií.

Dosiahnutiu hlavného cieľa napomohlo splnenie týchto čiastkových cieľov:

- Ponúknuť čitateľovi prehľadný náčrt rôznych typov a spôsobov modelovania neurčitosti.
- Porovnať jednotlivé štruktúry používané rôznymi autormi v modelovaní pojmov zovšeobecnenej teórie pravdepodobnosti. Ukázať, prečo sú na to A-posety vhodnou štruktúrou.
- Opísať základnú kategóriu a jej podkategórie, v ktorej všetky pojmy a konštrukcie klasickej (Kolmogorovej) teórie pravdepodobnosti sú obsiahnuté ako špeciálny prípad.

- Ukázať, prečo je pravdepodobnostný integrál vhodným a prirodzeným rozšírením pravdepodobnostnej miery.
- Študovať a opísať stochastickú nezávislosť, závislosť a podmienenú pravdepodobnosť v zovšeobecnenej teórii pravdepodobnosti.
- Hľadať ďalšie perspektívy bádania v tejto oblasti.

Hlavné výsledky

Pravdepodobnostný integrál ako linearizácia náhodných udalostí

Nech $\mathbb{IA}$ je kategória, v ktorej sú objektmi IA-posety a morfizmami sú sekvenčne spojité A-homomorfizmy.

K opisu prechodu od klasického pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ k zovšeobecnenému pravdepodobnostnému priestoru $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ v jazyku teórie kategórií bolo potrebné zaviesť ešte nasledujúce podkategórie kategórie $\mathbb{IA}$:

- $\mathbb{LIA}$, v ktorej objektmi sú Łukasiewiczove klany,
- $\mathbb{ELIA}$, v ktorej objektmi sú extremálne Łukasiewiczove klany (najmenšie alebo najväčšie prvky v ekvivalentnej triede),
- $\mathbb{FELIA}$, v ktorej objektmi sú plné Łukasiewiczove klany.

V dizertačnej práci boli opísané, vysvetlené a dokázané nasledujúce tézy:

- $\mathbb{ELIA}$ je minimálna kategória, v ktorej možno opísať prechod od klasickej ku zovšeobecnenej pravdepodobnosti.
- Klasický pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a fuzzy pravdepodobný priestor $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ sú modelmi teórie pravdepodobnosti, ktorých základné pojmy je možné definovať vo vnútri kategórie $\mathbb{ELIA}$.
- V tejto kategórii sú σ-algebry udalostí $\mathbf{A}$ a merateľné fuzzy udalosti $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ objektmi a morfizmy sa nazývajú pozorovateľné.
- Pravdepodobnostné miery a zovšeobecnené pravdepodobnostné miery (pravdepodobnostné integrály) sú morfizmami.

- Pravdepodobnostná miera aj pravdepodobnostný integrál sú „linearizácie“ náhodných udalostí charakterizované fundamentálnou vlastnosťou pravdepodobnosti – aditivitou, pričom „linearizácia“ pomáha robiť rozhodnutia.
- $\mathbf{A}$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ majú iniciálnu štruktúru vzhľadom na pravdepodobnostné miery a pravdepodobnostné integrály.
- $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je *minimálnym* kategoriálnym rozšírením $(\Omega, \mathbf{A}, p)$, pričom rozšírenie je charakterizované ako kategoriálna epireflexia.
- Pomocou epireflexie každému základnému pojmu z klasickej teórie pravdepodobnosti korešponduje jeho fuzzyfikovaný pojem v podkategórii $\mathbb{FELIA}$.
- V kategórii $\mathbb{FELIA}$ je možné definovať kanonickým spôsobom asymetrickú stochastickú závislosť a nezávislosť a podmienenú pravdepodobnosť.

Najskôr bolo potrebné sformulovať a dokázať viaceré tvrdenia, ktoré vedú k hlavnému výsledku. Na tomto mieste je uvedený len výber najdôležitejších tvrdení vedúcich k opisu prechodu z $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ do $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ v pojmoch kategoriálnej epireflexie.

Lema 1. *(V dizertácii lema 1.) Nech* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú polia podmnožín* Ω*, resp.* Ξ*. Nech* h *je A-homomorfizmus z* $\mathbf{B}$ *do* $\mathbf{A}$*, ktoré sú aj A-posety. Potom* h *je booleovský homomorfizmus.*

Lema 2. *(V dizertácii lema 5.) Nech* $\mathbf{A}$ *je* σ*-pole podmnožín* Ω *a nech* h *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $\mathbf{A}$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$*. Potom* h *je pravdepodobnostná miera.*

Nasledujúca veta hovorí o rozširovaní pravdepodobnostnej miery a znázorňuje ju komutatívny diagram na obr. 1.

Veta 1. *(V dizertácii veta 2.) Nech* $\mathbf{A}$ *je* σ*-pole podmnožín* Ω *a nech* h *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $\mathbf{A}$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$*. Potom existuje práve jeden sekvenčne spojitý A-homomorfizmus* h_m *z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$*, ktorý rozširuje* h *na* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$*.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "h"] \arrow[d, hook] \arrow[drr, phantom, "\#"] & & \mathcal{M}(\mathbf{T}) \equiv [0,1] \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[urr, dashed, "\exists ! h_m"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Obr. 1

Z týchto viet vyplýva dôležité spomínané tvrdenie, že pravdepodobnostný integrál je aditívna linearizácia náhodných udalostí:

Dôsledok 1. *(V dizertácii dôsledok 1.) Nech* $\mathbf{A}$ *je* σ*-pole množín a nech* L *je zobrazenie z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $[0,1]$*. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) L *je aditívna linearizácia.*

(ii) Existuje práve jedna pravdepodobnostná miera p *na* $\mathbf{A}$ *taká, že* $L = \int (.) \mathrm{d}p$*.*

Ďalším krokom bolo dokázať vetu o jednoznačnom rozšírení sekvenčne spojitých A-homomorfizmov, čo vedie ku spomínanej epireflexii. Podstatným spôsobom sa využívajú výsledky o rozširovaní pravdepodobnostnej miery na pravdepodobnostný integrál.

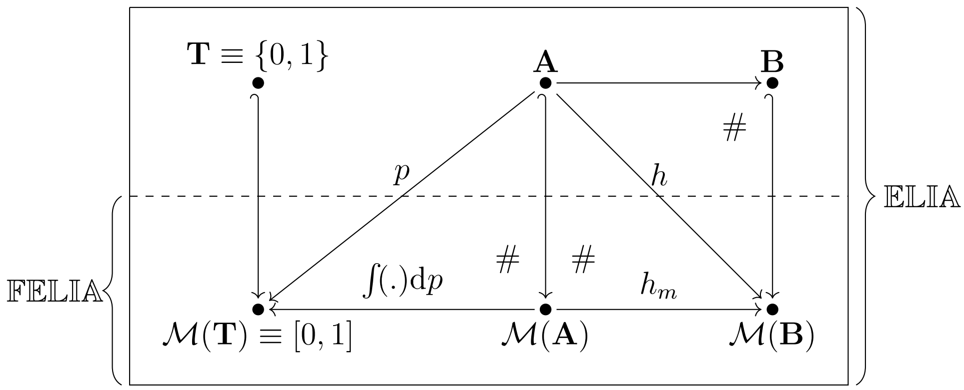
Veta 2. *(V dizertácii veta 3.) Nech* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú polia podmnožín* Ω*, resp.* Ξ*. Nech* h *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $\mathbf{A}$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$*. Potom existuje práve jeden sekvenčne spojitý A-homomorfizmus* h_m *z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$*, ktorý rozširuje* h *na* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$*.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[r, "e"] & {[0,1]}^{\Xi} \\
\arrow[r, phantom, "\#"] & \mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[u, dashed, "?\, h_m"] \arrow[ur, "h_\Xi"'] \arrow[r, phantom, "\#"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[drr, phantom, "\#"] & & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \\
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[urr, dashed, "\exists ! h_m"'] & & h_m(.) = h_\Xi(.)
\end{tikzcd}
$$

Obr. 2

Dôsledok 2. *(V dizertácii dôsledok 2.) Nech* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú polia podmnožín* Ω*, resp.* Ξ*. Nech* h *je sekvenčne spojitý A-homomorfizmus z* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$*. Potom existuje jediný* *sekvenčne spojitý A-homomorfizmus* h_m *z* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ *taký, že* $h(A) = h_m(A)$ *pre všetky* $A \in \mathbf{A}$.

Všetky tvrdenia vedú ku kľúčovému tvrdeniu o epireflektívnej podkategórii, ktorá je veľmi dôležitým pojmom v teórii kategórií (pozri [1]). Základné pojmy klasickej pravdepodobnostnej teórie sú *reflektované* (cez epireflektor) do ich fuzzyfikácie, pozri obr. 3.



Obr. 3

Veta 3. *(V dizertácii veta 4.)* $\mathbb{FELIA}$ *je epireflektívnou podkategóriou kategórie* $\mathbb{ELIA}$*, kde* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *je epireflexia* $\mathbf{A}$*,* $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ *je epireflexia* $\mathbf{B}$*,* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ *je epireflexia* $\mathbf{T}$*,* $\int(.)\mathrm{d}$ *je epireflexia* p *a* h_m *je epireflexia* h*.*

Pre kategóriu $\mathbb{ELIA}$ platia dôležité závery:

- Pozorovateľné sú morfizmy v $\mathbb{ELIA}$. Každej pozorovateľnej $h : \mathbf{A} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$ zodpovedá práve jedna pozorovateľná $h_m : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$, ktorá rozširuje h, pričom klasickú pozorovateľnú z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ možno považovať za pozorovateľnú h z $\mathbf{A}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ (cez vnorenie $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$).

- Pravdepodobnostné miery a pravdepodobnostné integrály sú práve pozorovateľné do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$.

- $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je epireflexou $\mathbf{A}$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ nesie iniciálnu štruktúru A-posetu vzhľadom na pravdepodobnostné integrály.

- Pravdepodobnostné integrály sú práve aditívne linearizácie náhodných udalostí.

$$
\begin{tikzcd}
 & {[0,1]} & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "L_1(r)"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1{}^{\leftarrow}"] \arrow[ur, phantom, "\#", shift left=6ex] & \mathbf{A}\times\mathbf{B} \arrow[u, "r"'] \arrow[ur, phantom, "\#", shift right=6ex] & \mathbf{B} \arrow[ul, "L_2(r)"'] \arrow[l, "\mathrm{pr}_2{}^{\leftarrow}"']
\end{tikzcd}
$$

Obr. 4

- Prechod od $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ ku $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je zdôvodnený kategoriálnymi argumentmi.

Stochastická nezávislosť

V klasickej teórii pravdepodobnosti je stochastická nezávislosť vždy symetrická.

Nech $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B})$ je súčinom merateľných priestorov $(\Omega, \mathbf{A})$ a $(\Xi, \mathbf{B})$, t. j. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ je najmenšia σ-algebra podmnožín $\Omega \times \Xi$, ktorá obsahuje všetky obdĺžniky $A \times B; A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$. Nech $\mathrm{pr}_1 : \Omega \times \Xi \longrightarrow \Omega$, $\mathrm{pr}_2 : \Omega \times \Xi \longrightarrow \Xi$ sú zvyčajné merateľné projekcie ($\mathrm{pr}_1(\omega, \xi) = \omega$, $\mathrm{pr}_2(\omega, \xi) = \xi$, $\omega \in \Omega$, $\xi \in \Xi$) a nech $\mathrm{pr}_1^{\leftarrow} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ a $\mathrm{pr}_2^{\leftarrow} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ sú príslušné merateľné vzorové zobrazenia. Nech $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Potom, $\mathrm{pr}_1^{\leftarrow}(A) = A\times\Xi$ a $\mathrm{pr}_2^{\leftarrow}(B) = \Omega\times B$. Pre $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, zloženie $r \circ \mathrm{pr}_1^{\leftarrow}$ a $r \circ \mathrm{pr}_2^{\leftarrow}$ definuje laterálne zobrazenia $L_1 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $L_2 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Každý „súčinový“ experiment $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ teda definuje dva „laterálne“ experimenty $(\Omega, \mathbf{A}, L_1(r))$ a $(\Xi, \mathbf{B}, L_2(r))$ (pozri obr. 4).

Definícia 1. (V dizertácii definícia 25.) Nech $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sú klasické náhodné experimenty. Nech $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ a nech $L_1(r) = p$, $L_2(r) = q$. Potom sa $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ nazýva *klasický združený experiment.*

Definícia 2. (V dizertácii definícia 26.) Nech $(\Omega\times\Xi, \mathbf{A}\times\mathbf{B}, r)$ je *klasickým združeným experimentom* $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ a nech $r = p\times q$. Potom $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sa nazývajú *stochasticky nezávislé* v $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$.

Dizertačná práca používa iný prístup – pomocou kategoriálnych metód – k skúmaniu stochastickej nezávislosti a podmienenej pravdepodobnosti. V práci je ukázané, že fuzzyfikácia klasickej teórie pravdepodobnosti umožňuje modelovať asymetrickú stochastickú nezávislosť. Stochastická nezávislosť a závislosť sú skúmané pomocou pojmu stochastického kanála, ktorý hrá kľúčovú úlohu v takto vybudovanej teórii a prináša nový pohľad na skúmanú problematiku.

Definícia 3. (V dizertácii definícia 27.) Nech $(\Omega, \mathbf{A})$ je merateľný priestor. Potom $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}))$ nazývame *priestor udalostí* a $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, nazývame *experiment.* Ak $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ je klasický experiment, tak hovoríme, že $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je jeho fuzzyfikáciou.

Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je experiment a nech $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}))$ je priestor udalostí. Nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná. Pre každý pravdepodobnostný integrál $\overline{p} = \int(.)\mathrm{d}p$ na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, je zloženie $\overline{p} \circ g$ dvoch pozorovateľných pozorovateľná, čiže pravdepodobnostný integrál $\overline{q} = \int(.)\mathrm{d}q$ na $\mathcal{M}(\mathbf{B})$. Toto vytvára štatistické zobrazenie $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$, ktoré sprostredkovane zobrazuje p na $q = T_g(p)$.

„Stochastický kanál“ je kanál, ktorým „stochastické informácie“ prúdia z jedného priestoru udalostí do iného priestoru udalostí. V klasickom prípade, dvojice $(f, f^{\rightarrow})$ spĺňajú účel a v zovšeobecnenom prípade duálne zobrazenia (pozri [15]) pozorovateľná $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ a príslušné štatistické zobrazenie $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ hrajú kľúčovú rolu.

Definícia 4. (V dizertácii definícia 29.) Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}))$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}))$ sú priestory udalostí, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná a nech $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ je korešpondujúce štatistické zobrazenie. Potom sa (g, T_g) nazýva *stochastický kanál.*

Priestory udalostí zovšeobecňujú merateľné priestory a štatistické zobrazenie zovšeobecňujú merateľné zobrazenia. Na vybudovanie pojmu asymetrickej nezávislosti potrebujeme definovať združený experiment.

Definícia 5. (V dizertácii definícia 28.) Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú dva experimenty. Potom $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$, kde $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ a $L_1(r) = p$, $L_2(r) = q$, nazývame *združený experiment.*

Poznamenajme, že laterálne zobrazenia $L_1 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $L_2 : \mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ zovšeobecňujú projekcie $\mathrm{pr}_1 : \Omega \times \Xi \longrightarrow \Omega$ a $\mathrm{pr}_2 : \Omega \times \Xi \longrightarrow \Xi$. Duálne zobrazenia sú definované kánonickým spôsobom. Pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, definujme $\tilde{u} \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ takto: pre $\omega \in \Omega, \xi \in \Xi$, položme $\tilde{u}(\omega, \xi) = u(\omega)$ a označme $e_1 : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ výsledné kánonické vnorenie posielajúce u do $\tilde{u}$; $e_2 : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ je definované analogicky

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[r, "e_1"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\#"] & \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \arrow[d, "h"] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\#"] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[l, "e_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& \mathcal{M}(\mathbf{C}) &
\end{tikzcd}$$

Obr. 5

$(\tilde{v}(\omega, \xi) = v(\xi))$. Zjavne, e_1 a e_2 sú pozovateľné. Nech T_{e_1} a T_{e_1} sú príslušné štatistické zobrazenia. Ľahko sa overí, že $L_1 = T_{e_1}$, $L_2 = T_{e_2}$, $\int u \mathrm{d}p = \int \tilde{u} \mathrm{d}r, u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, a $\int v \mathrm{d}q = \int \tilde{v} \mathrm{d}r, v \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$.

Kľúčová pre naše skúmanie je táto otázka: Ako pozorovateľná $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$, resp. príslušný stochastický kanál (g, T_g), ovplyvňuje združený experiment $(\Omega \times \Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \int (.) \mathrm{d}r)$?

Nech $(\Omega, \mathbf{A}), (\Xi, \mathbf{B}), (\Lambda, \mathbf{C})$ sú merateľné priestory, nech $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ a $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ sú pozorovateľné, nech $T_f : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ sú príslušné štatistické zobrazenia. Nech pre $\lambda \in \Lambda$ je δ_λ Diracova pravdepodobnostná bodová miera ($\delta_\lambda(C) = 1$ pre $C \in \mathbf{C}$ a $\delta_\lambda(C) = 0$ inak). Nech $T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)$ je príslušná súčinová pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Nech pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$,

$$(\otimes) \qquad (h(u))(\lambda) = \int u \mathrm{d}(T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)), \; \lambda \in \Lambda,$$

a nech $h : \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow [0,1]^\Lambda$ je určené predpisom $(\otimes)$.

Propozícia 1. *(V dizertácii propozícia 1.)*
(i) Zobrazenie h je pozorovateľná z $\mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{C})$.
(ii) Nech $e_1 : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ a $e_2 : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ sú kánonické vnorenia. Potom $h \circ e_1 = f$ a $h \circ e_2 = g$.

Definícia 6. (V dizertácii definícia 30.) Nech $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ a $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ sú pozorovateľné. Potom pozorovateľná $h : \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ definovaná pomocou $(\otimes)$ sa nazýva *súčin pozorovateľných* f a g; budeme ju označovať ako $f \otimes g$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathbf{A}) & \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \arrow[l, "L_1"'] \arrow[r, "L_2"] \arrow[dl, phantom, "\#"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathcal{P}(\mathbf{B}) \\
& \mathcal{P}(\mathbf{A}) \arrow[ul, "T_{\mathrm{id}}"] \arrow[u, dashed, "\exists!\; T"] \arrow[ur, "T_g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Obr. 6

Konštrukciu súčinu pozorovateľných schematizuje komutatívny diagram na obrázku 5.

Propozícia 2. *(V dizertácii propozícia 2.) Nech* $f \otimes g : \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C})$ *je súčin pozorovateľných a nech* $T_{f\otimes g} : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ *je príslušné štatistické zobrazenie. Potom:*

(i) Pre každé $\lambda \in \Lambda$, Λ *je nosná množina* $\mathbf{C}$ *, platí* $T_{f\otimes g}(\delta_\lambda) = T_f(\delta_\lambda) \times T_g(\delta_\lambda)$.

(ii) Nech $\Lambda = \Omega$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ *a nech* f *je identickou pozorovateľnou* $\mathrm{id} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$. *Potom pre každé* $\omega \in \Omega$ *platí* $T_{\mathrm{id}\otimes g}(\delta_\omega) = \delta_\omega \times T_g(\delta_\omega)$.

Propozícia 3. *(V dizertácii propozícia 23.) Nech* $\mathrm{id} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *je identická pozorovateľná, nech* $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ *je pozorovateľná, nech* $T_{\mathrm{id}} : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *a* $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ *sú príslušné štatistické zobrazenia. Potom existuje jediné štatistické zobrazenie* $T : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ *také, že diagram na obr. 6 komutuje a* $T = T_{\mathrm{id}\otimes g}$.

Dôsledok 3. *(V dizertácii dôsledok 4.)*
(i) Existuje jediná taká pozorovateľná $h : \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$, *že diagram na obr. 7 komutuje a* $h = \mathrm{id}\otimes g$.
(ii) Pre každé $p \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *existuje jediné také* $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, *že* $\overline{r} = \overline{p} \circ (\mathrm{id}\otimes g)$.

Definícia 7. (V dizertácii definícia 31.) Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty, nech $\mathrm{id} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je identická pozorovateľná, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná, nech $T_{\mathrm{id}} : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A})$ a $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ sú príslušné štatistické zobrazenia. Nech $T_g(p) = q$ a $r = T_{\mathrm{id}\otimes g}(p)$. Potom sa trojica $(\Omega\times\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ sa nazýva *g-združený experiment* experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[r, "e_1"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \arrow[d, dashed, "\exists!"', "\mathrm{id}\otimes g"] \arrow[dl, phantom, "\#"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathcal{M}(\mathbf{B}) \arrow[l, "e_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & \mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[d, "\overline{p}"] & \\
 & \mathcal{M}(\mathbf{T}) &
\end{tikzcd}$$

Obr. 7

Teraz je možné dať všeobecnú ODPOVEĎ na danú OTÁZKU. Špecifickejšia odpoveď bude neskôr.

Nech $(\Omega\times\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ je združený experiment $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$. Nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná a nech (g, T_g) je príslušný stochastický kanál taký, že $T_g(p) = q$. Potom pravdepodobnosť $r \in \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ je jednoznačne determinovaná v takomto zmysle: $T_{\mathrm{id}\otimes g}$ je jediné štatistické zoprazenie T z $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ do $\mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ také, že $L_1\circ T = T_{\mathrm{id}}$, $L_2\circ T = T_g$ a $r = T_{\mathrm{id}\otimes g}(p)$. Jednoducho povedané, $(\Omega\times\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}(T_{\mathrm{id}\otimes g}(p)))$ je jediný združený experiment, ktorý „zohľadňuje stochastický kanál“ (g, T_g), $T_g(p) = q$.

Poznámka 1. (V dizertácii poznámka 5.) Hovoríme, že ak $L_2\circ T = T_g$, $T : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, tak T_g je faktorizované cez $\mathcal{P}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$; súčiny a faktorizácie štatistických zobrazení boli študované v [4], [5], [11], kde $M_1^+(\Omega, \mathbf{A})$ označuje množinu všetkých pravdepodobnostných mier na $\mathbf{A}$.

Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú náhodné experimenty, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná, a nech (g, T_g) je príslušný stochastický kanál taký, že $T_g(p) = q$. Je rozumné tvrdiť, že $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ je g-nezávislé na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, ak prenesená stochastická informácia $\overline{q} = \int(.)\mathrm{d}q$ o priestore udalostí $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}))$ „nediskrimuje“ voľbu stochastickej informácie o $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}))$. Presnejšie, keď $\overline{s}\circ g = \overline{q}$ pre každé $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ alebo, ekvivalentne, $T_g(s) = q$ pre každé $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Taký stochastický kanál môže byť charakterizovaný ako degenerovaný (q-hodnotový). Nasledujúca propozícia opisuje takéto kanály.

Pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ a $\omega \in \Omega$, definujme $(g(u))(\omega) = \int u\mathrm{d}q$. To definuje zobrazenie g z $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ do $[0,1]^\Omega$.

Propozícia 4. *(V dizertácii propozícia 4.)*
(i) g je pozorovateľná do $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.
(ii) $T_g(s) = q$ pre všetky $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$.

Definícia 8. (V dizertácii definícia 32.) Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}))$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}))$ sú priestory udalostí, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná, nech T_g je príslušné štatistické zobrazenie. Nech $q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Ak $T_g(s) = q$ pre všetky $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, tak g a T_g nazývame *degenerované*.

Propozícia 5. *(V dizertácii propozícia 5.) Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty. Nech $\mathrm{id} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ (sú) je identick(é)á pozorovateľn(é)á, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je degenerovaná pozorovateľná, nech $\mathrm{id} \otimes g : \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je ich súčin, nech T_{id}, T_g, a $T_{\mathrm{id} \otimes g}$ sú príslušné štatistické zobrazenia. Predpokladajme, že $T_g(p) = q \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Potom pre všetky $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ platí $T_{\mathrm{id} \otimes g}(s) = s \times q$.*

Definícia 9. (V dizertácii definícia 33.) Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty, nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná a nech $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ je príslušné štatistické zobrazenie také, že $T_g(p) = q$. Ak T_g je degenerované, potom hovoríme, že experiment $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ je *stochasticky g-nezávislý* na experimente $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$.

Z propozície 5 vyplýva nasledujúca ODPOVEĎ (špecifická). Predpokladajme, že experiment $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ je stochasticky g-nezávislý na experimente $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$, t. j. (g, T_g) je degenerovaný stochastický kanál, a $T_g(p) = q$. Potom, pre všetky $s \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ platí $T_{\mathrm{id} \otimes g}(s) = s \times T_g(s) = s \times q$. Špeciálne, $T_{\mathrm{id} \otimes g}(p) = p \times q$.

Definícia 10. (V dizertácii definícia 34.) Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty. Nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ a $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$ sú pozorovateľné. Ak g a f sú degenerované, tak hovoríme, že $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú *stochasticky nezávislé*.

Dôsledok 4. *(V dizertácii dôsledok 5.) Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ sú experimenty a nech $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sú príslušné klasické náhodné experimenty. Nech $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pozorovateľná a nech $T_g : \mathcal{P}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B})$ je* *príslušné štatistické zobrazenie také, že $T_g(p) = q$. Nech $(\Omega\times\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ je g-združený experiment experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ a nech $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$ je príslušný združený klasický náhodný experiment.*

Ak $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ je g-nezávislý na $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, t.j. ak stochastický kanál (g, T_g) je degenerovaný, tak $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ sú stochasticky nezávislé v ich klasickom združenom náhodnom experimente $(\Omega \times \Xi, \mathbf{A} \times \mathbf{B}, r)$.

Poznámka 2. (V dizertácii poznámka 6.) Nech sú dva klasické náhodné experimenty $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ stochasticky nezávislé v ich združenom klasickom pokuse $(\Omega\times\Xi, \mathbf{A}\times\mathbf{B}, r)$. Potom $r = p\times q$. Nech $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$, $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ a $(\Omega\times\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ sú ich príslušné fuzzyfikácie. Poznamenajme, že z predpokladov nevyplýva existencia pozorovateľnej $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$, resp. $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$, a že medzi $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ „neexistuje žiadna stochastická väzba“. Ak totiž nastal klasický výsledok $\omega \in \Omega$, resp. $\xi \in \Xi$, tak z $\mathrm{pr}_1(\omega, \xi) = \omega$, resp. $\mathrm{pr}_2(\omega, \xi) = \xi$, vyplýva, že v „protiľahlom“ pokuse mohol nediskriminovane nastať ktorýkoľvek výsledok $\xi \in \Xi$, resp. $\omega \in \Omega$. Podobne, ak nastane udalosť $A \in \mathbf{A}$, resp. $B \in \mathbf{B}$, pričom $p(A) = r(A\times\Xi)$, resp. $q(B) = r(B\times\Omega)$, tak to nediskriminuje udalosti a ich pravdepodobnosti v „protiľahlom“ experimente. „Neexistencii“ stochastickej väzby medzi $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ „zodpovedajú“ degenerované pozorovateľné $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ a $f : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$, pričom $T_g(p) = q$, $T_f(q) = p$. To ale znamená, že stochastická nezávislosť klasických experimentov $(\Omega, \mathbf{A}, p)$ a $(\Xi, \mathbf{B}, q)$ je implicitnou kvalitou explicitne definovanej stochastickej nezávislosti experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$, ktorá je vyjadrená v jazyku degenerovaných pozorovateľných.

Podmienená pravdepodobnosť

Uvažujme o g-združenom experimente $(\Omega\times\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ dvoch experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$. Podľa propozície 3 je $\overline{r} = \overline{p} \circ (\mathrm{id} \otimes g)$ v združenom experimente jednoznačne determinovaný. V tejto časti prediskutujeme, ako $\overline{r}$ reflektuje „stochastickú závislosť/nezávislosť“ $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ od $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$. Najmä nás zaujíma konštrukcia „pravdepodobnosti $R(u|v)$ udalosti $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ podmienenej udalosťou $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$“. Použitím vnorení $e_1 : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, $e_2 : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, budeme chápať podmienenú udalosť $u|v$ ako udalosť $e_2(u)|e_1(v)$ v združenom experimente $(\Omega\times\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ a ukážeme, že to vedie ku prirodzenej konštrukcii $R(u|v)$.

Keď je stochastický kanál (g, T_g) degenerovaný, $r = p \times q$, vtedy z experimentu $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ do experimentu $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$ žiadna relevantná stochastická informácia neprúdi a potom je prirodzené definovať $R(u|v) = \overline{r}(e_2(u)) = \overline{q}(u) = \int u\mathrm{d}q$.

Pre $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ označme $\tilde{u} = e_2(u) \in \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, t. j., $\tilde{u}(\omega,\xi) = u(\xi), \omega \in \Omega$, $\xi \in \Xi$, a pre $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ označme $\tilde{v} = e_1(v) \in \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, t.j., $\tilde{v}(\omega,\xi) = v(\omega)$, $\omega \in \Omega, \xi \in \Xi$. Pre $w \in \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ každá dvojica $((\omega,\xi), a)$, $0 < a \leq w(\omega,\xi)$ môže byť považovaná za „fuzzy výsledok podporujúci w“, množina $M_w = \{((\omega,\xi), a); 0 < a \leq w(\omega,\xi)\}$ môže byť považovaná za množinu všetkých fuzzy výsledkov podporujúcich w a $\int w\mathrm{d}r$ meria „aká veľká“ je množina M_w. Pre $B \in \mathbf{B}$ položme $\widetilde{\chi_B} = e_2(\chi_B) = \chi_{\Omega\times B} \in \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$. Potom množina $M_{\chi_B.v} = M_{\widetilde{\chi_B}.\tilde{v}} = M_{\widetilde{\chi_B}} \cap M_{\tilde{v}} = \{((\omega,\xi), a); 0 < a \leq \tilde{v}(\omega,\xi), \xi \in B\}$ môže byť považovaná za „množinu všetkých fuzzy výsledkov podporujúcich $\widetilde{\chi_B}$ za podmienky $\tilde{v}$“.

Pre $0 < \int \tilde{v}\mathrm{d}r = \int v\mathrm{d}p$, definujme

$$R_{\mathbf{B}}(\chi_B|v) = \frac{\int \widetilde{\chi_B}.\tilde{v}\mathrm{d}r}{\int \tilde{v}\mathrm{d}r}.$$

Pre každú $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int \tilde{v}\mathrm{d}r = \int v\mathrm{d}p$, $R(\chi_B|v)$ definuje pravdepodobnostnú mieru $R_{\mathbf{B}}(.|v)$ na $\mathbf{B}$, $R(.|v)$ je pozorovateľná do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$, a teda môže byť jednoznačne rozšírená na pozorovateľnú z $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Toto rozšírenie ma tvar

$$(*) \qquad R(u|v) = \frac{\int \tilde{u}.\tilde{v}\mathrm{d}r}{\int \tilde{v}\mathrm{d}r}, u \in \mathcal{M}(\mathbf{B}),$$

a predstavuje jedinú prirodzenú definíciu zovšeobecnej podmienej pravdepodobnosti založenej na stochastickom kanáli (g, T_g) a príslušnom g-združenom experimente.

Definícia 11. (V dizertácii definícia 35.) Nech $(\Omega\times\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}r)$ je g-združený experiment experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$. Nech $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int \tilde{v}\mathrm{d}r = \int v\mathrm{d}q$. Potom pozorovateľnú $R(.|v) : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$ definovanú pomocou $(*)$ nazývame *pravdepodobnosť na $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ podmienená udalosťou $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$*.

Pre zovšeobecnené pravdepodobnostné domény (MV-algebry, Łukasiewiczove klany, D-posety, ...) ďalšia binárna operácia „súčin“ bola študovaná primárne v spojení so združenými pozorovateľnými, stochastickou nezávislosťou, podmienenou strednou hodnotou a podmienenou pravdepodobnosťou, napr. v [27], [8], [30], [18], [28],

[23], [10], [19], [6], [21]. Je známe (pozri [28], [23]), že v plnom Łukasiewiczovom klane sa „súčin“ redukuje na zvyčajný bodový súčin funkcií.

Poznamenajme, že konštrukcia zovšeobecnenej podmienej pravdepodobnosti pre MV-algebry a D-posety je založená na operácii súčinu. V [23], [10] pre $u, v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int u \mathrm{d}p$, je $P(v|u)$ definované cez $(\int v.u \mathrm{d}p)/(\int u \mathrm{d}p)$. Naše konštrukcie plne podporujú „podmieňovanie cez súčin“ a, čo je dôležitejšie, tvrdíme, že pre plné Łukasiewiczove klany „podmieňovanie cez súčin“ je kánonické.

Lema 3. *(V dizertácii lema 10.) Nech $R(.|v) : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$ je pravdepodobnosť na $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ podmienená udalosťou $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int \tilde{v} \mathrm{d}r = \int v \mathrm{d}p$, definovaná pomocou $(*)$. Potom pre každé $u \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$ platí $\int \tilde{u}.\tilde{v} \mathrm{d}r = \int g(u).v \mathrm{d}p$ a $\int \tilde{v} \mathrm{d}r = \int v \mathrm{d}p$.*

Nasledujúci špeciálny prípad je zaujímavý. Uvažujme g-združený experiment experimentov $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{A}), \int(.)\mathrm{d}p)$ a $(\Xi, \mathcal{M}(\mathbf{B}), \int(.)\mathrm{d}q)$, pričom sú tieto experimenty identické a $g \equiv \mathrm{id}$ je identická pozorovateľná. Nech $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int v \mathrm{d}p$. Potom pre každé $u \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ platí

$$R(u|v) = \frac{\int u.v \mathrm{d}p}{\int v \mathrm{d}p}$$

a pre $v = \chi_A, u = \chi_B, A, B \in \mathbf{A}, p(A) > 0$ dostaneme

$$R(u|v) = \frac{\int u.v \mathrm{d}p}{\int v \mathrm{d}p} = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}.$$

Nakoniec si všimnime, že zvyčajný prístup k nezávislosti cez podmienenú pravdepodobnosť je kompatibilný s našim prístupom cez stochastické kanály. Naozaj, ak $g : \mathcal{M}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je degenerovaná pozorovateľná, tak $\overline{p \times q} = \overline{p} \circ (\mathrm{id} \otimes g)$ a $R(u|v) = \int u \mathrm{d}q$, $v \in \mathcal{M}(\mathbf{A}), 0 < \int v \mathrm{d}p$.

Súhrn v anglickom jazyku

The present dissertation is devoted to investigation of generalized probability theory via categorical methods. It offers an answer to L. Zadeh's challenge to construct a fuzzified probability theory, namely, we present a minimal categorical (epireflective) extension of kolmogorovian approach. Probability integral is perceived as a linearization of random events. We present our results related to stochastic (in)dependence and conditional probability in generalized probability space. We provide appropriate background information, results and their summary. Our presentation could serve in teaching probability theory and mathematical structures, as well as to provide inspiration for future research in the area of mathematical and philosophical foundations of probability theory.

Zoznam použitej literatúry

Literatúra

[1] Adámek, J.: Theory of Mathematical Structures. Reidel, Dordrecht, 1983.

[2] Babicová, D.: *Probability integral as a linearization.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **72** (2018), 1–15.

[3] Babicová, D., Frič, R.: *Real functions in stochastic dependence.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **74** (2019), 17–34.

[4] Bugajski, S.: Statistical maps I. Basic properties. Math. Slovaca **51** (2001), 321–342.

[5] Bugajski, S.: Statistical maps II. Operational random variables. Math. Slovaca **51** (2001), 343–361.

[6] Chovanec, F., Drobná, E., Kôpka, F., Nánásiová, O.: Conditional states and independence in D-posets. Soft Comput. **14** (2014), 1027–1034.

[7] Chovanec, F., Kôpka, F.: D-posets. In: Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Structures. Edited by K. Engesser, D. M. Gabbay and D. Lehmann, Elsevier, Amsterdam, 2007, 367–428.

[8] Di Nola, A., Dvurečenskij, A.: Product MV-algebras. Multi. Val. Logic **6** (2001), 193–215.

[9] Dvurečenskij, A., Pulmannová, S.: New Trends in Quantum Structures, Kluwer Academic Publ. and Ister Science, Dordrecht and Bratislava, 2000.

[10] Dvurečenskij, A., Pulmannová, S.: Conditional probability on σ-MV-algebras. Fuzzy Sets Syst. **155** (2005), 102–118.

[11] Eliaš, P., Frič, R.: Factorization of observables. Internat. J. Theoret. Phys. **56** (2017), 4073–4083.

[12] Eliaš, P., Frič, R.: Conditional probability on full Łukasiewicz tribes. (To appear in Soft Computing, DOI 10.1007/s00500-020-04762-6.)

[13] Frič, R.: Kvantové štruktúry a teória kategórií. Advances in Electrical and Electronic Engineering **3** (2004), 14—20.

[14] Frič, R., Papčo, M.: A categorical approach to probability. Studia Logica **94** (2010), 215–230.

[15] Frič, R., Papčo, M.: On probability domains IV. Internat. J. Theoret. Phys. **56** (2017), 4084–4091.

[16] Frič, R., Papčo, M.: Probability: from classical to fuzzy. Fuzzy Sets Syst. **326** (2017), 106–114.

[17] Gudder, S.: Fuzzy probability theory. Demonstratio Math. **31** (1998), 235–254.

[18] Jurečková, M.: On the conditional expectation on probability MV-algebras with product. Soft Comput. **5** (2001), 381–385.

[19] Kalina, M., Nánásiová, O.: Conditional states and joint distributions on MV-algebras. Kybernetika **42** (2006), 129–142.

[20] Kolmogorov, A. N.: Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin, 1933.

[21] Kôpka, F.: Quasi product on Boolean D-posets. Int. J. Theor. Phys. **47** (2008), 26–35.

[22] Kôpka, F., Chovanec, F.: D-posets. Math. Slovaca **44** (1994), 21–34.

[23] Kroupa, T.: Conditional probability on MV-algebras. Fuzzy Sets Syst. **149** (2005), 369–381.

[24] Mesiar, R.: Fuzzy sets and probability theory. Tatra Mountains Mathematical Publ. **1** (1992), 105–123.

[25] Mundici, D.: A geometric approach to MV-algebras, In: On Logical, Algebraic and Probabilistic Aspects of Fuzzy Set Theory, Dedicated to Erich Peter Klement, (R. Mesiar et al. Eds.), Springer, Berlin, 2016, 57-70.

[26] Navara, M.: Probability theory of fuzzy events. In: E. Montseny, P. Sobrevilla (eds.), Fourth Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology and 11 Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Universitat Polit ecnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 2005, 325–329.

[27] Riečan, B.: On the product MV-algebras. Tatra Mountains Mathematical Publ. **16** (1999), 143–149.

[28] Riečan, B., Mundici, D.: Probability on MV-algebras. In: Handbook of Measure Theory, Vol. II (Editor: E. Pap), North-Holland, Amsterdam, 2002, 869–910.

[29] Skřivánek, V., Frič, R.: Generalized random events, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (2015), 4386–4396.

[30] Vrábelová, M.: A note on the conditional probability on product MV-algebras. Soft Comput. **4** (2000), 58–61.

[31] Zadeh, L. A.: Fuzzy sets. Information and Control **8** (1965), 338–353.

Zoznam publikovaných a v dizertačnej práci priložených článkov

1. Babicová, D.: *Probability integral as a linearization.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **72** (2018), 1–15.

2. Babicová, D. and Frič, R.: *Real functions in stochastic dependence.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **74** (2019), 17–34.

Zoznam ohlasov

Babicová, D.: *Probability integral as a linearization.* Tatra Mountains Mathematical Publ. **72** (2018), 1–15.

CITOVANÉ V:

- Frič, R.: *Product of Measurable Spaces and Applications.* Tatra Mountains Mathematical Publications, **74**, 1 (2019), 47-56 – SCOPUS

- Eliáš, P., Frič, R: *Conditional probability on full Łukasiewicz tribes.* Soft Computing (2020).

Zoznam príspevkov na konferenciách

- *Probability integral as a linearization*, The 30th International Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, 2016.
- *Triangular norms and conorms in statistics* (poster), International Conference Different Aspects of Analysis and Probability (DAAP), Rzeszów (Poľsko), 2016.
- *Fuzzification of probability and mathematical structures*, 18th International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics (ISCAMI 2017), Malenovice, 2017.
- *State as a linearization*, IQSA Quantum Structures Workshop, Nijmegen (Holandsko), 2017.
- *Stochastic independence/dependence in fuzzified probability theory*, 19th International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics (ISCAMI 2018), Malenovice, 2018.
- *Od klasickej ku deliteľnej pravdepodobnosti*, 50. konferencia slovenských matematikov, Jasná, 2018.
- *Conditional probability in fuzzified probability theory*, 20th International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics (ISCAMI 2019), Praha, 2019.