Asymptotický rast funkcií[1]

Teoretická časť

Definície a vety

Symboly $\mathbf{O}, \mathbf{o}, \mathbf{\Theta}, \prec, \sim$

- Def.: $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
- Def.: Funkcia f je *asymptoticky kladná*, ak platí $\exists n_0, \forall n > n_0\ f(n) > 0$.
- Def.: $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists C > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0\ |f(n)| \leq C \cdot |g(n)|$
- Pre asymptoticky kladné funkcie f, g možno zjednodušiť predošlú definíciu.
  Def.: $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists C\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\ f(n) \leq C \cdot g(n)$
- Tvr.: $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
- Vo všeobecnosti neplatí opačná implikácia: Čo znamená, že $f(n) \neq o(g(n))$?
  Buď $\nexists \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$, alebo $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0$.
  Takže, napr. platí $2n^2+33n-1000 = O(n^2)$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+33n-1000}{n^2} = 2$, čiže $2n^2+33n-1000 \neq o(n^2)$.
  Neexistencia limity je demonštrovaná nasledujúcim príkladom: $n \sin n + 5 = O(n)$ (pre $n_0 = 5$ a $C = 2$), ale limita $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n+5}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin n + \frac{5}{n}$ neexistuje.
- Def.: $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists C_1 > 0, C_2 > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0$
  $$C_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq C_2 \cdot |g(n)|$$
- Pre asymptoticky kladné funkcie f, g možno definíciu formulovať nasledovne:
  Def.: $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists C_1 > 0, C_2 > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0$
  $$C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$$
- Tvr.: $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f = O(g(n))\ \&\ g = O(f(n))$
- Tvr.: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \neq 0 \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$
- Def.: $f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow f(n) = o(g(n))$
- Def.: $f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$

Ostatné symboly - $\mathbf{\Omega}, \omega$

V literatúre nebývajú definované jednoznačne, preto si treba preveriť ich význam pred samotným štúdiom.

Staršia definícia symbolu Ω:

- Def.: $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g = o(f)$.
  V ďalšom sa tento spôsob nebude uvažovať !

V novšej literatúre sa používa v tomto význame symbol ω:

- Def.: $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g = o(f)$
- Def.: $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists C > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\ C \cdot |g(n)| \leq |f(n)|$
  - Pre asymptoticky kladné funkcie f, g možno zjednodušiť predošlú definíciu.
  - Def.: $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists C > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0\ C \cdot g(n) \leq f(n)$
- Tvr.: $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$
- Tvr.: $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f = O(g(n))\ \&\ f = \Omega(g(n))$
- Def.: $f \asymp g \Leftrightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

	limita			"C, n_0"		
množinový zápis	o	ω		O	Ω	Θ
relačný zápis	$\prec$	$\succ$	$\sim$			$\asymp$

[1] verzia 20100923-1028

Niektoré ďalšie definície a vzťahy

- **Odstránenie absolútnej hodnoty:** $|x| < a \in \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow -a < x < a$
- Def.: $\lim_{n\to\infty} f(n) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0(\varepsilon)\ |f(n) - a| < \varepsilon$
- Def.: $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0\ \exists n_0(K) \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0(K)\ |f(n)| > K$
- ***Stirlingova formula***: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
- ***L'Hospitalovo pravidlo***: pre limity typu $0/0$, ∞/∞

Tvr.: *f, g diferencovateľné, existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$, potom existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ a rovná sa $\lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.*

V praxi sa občas vyskytne nutnosť použiť L'Hospitalovo pravidlo viackrát, t.j. derivujeme čitateľa a menovateľa dovtedy, kým sme schopní vypočítať príslušnú limitu.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f''(n)}{g''(n)} = \dots$$

- ***"Veta o dvoch policajtoch" (O minoritnej a majoritnej funkcii)***:

ak $f(n) \le g(n) \le h(n)$ & $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} h(n) = a$, tak

$\lim_{n\to\infty} g(n)$ existuje a rovná sa tiež a.

- **Hierarchia funkcií:**

$A \cdot \ln^\gamma \ln n \prec B \cdot \ln^\delta n \prec C \cdot n^\beta \prec D \cdot \alpha^n \prec E \cdot n! \prec F \cdot n^n$, kde $\alpha > 1, \beta, \gamma, \delta > 0,\ A, ..., F \neq 0$

čo znamená

$A \cdot (\ln(\ln(n)))^\gamma \prec B \cdot (\ln(n))^\delta \prec C \cdot D \cdot n^\beta \prec E \cdot \alpha^n \prec F \cdot n! \prec n^n$, kde $\alpha > 1, \beta, \gamma, \delta > 0,\ A, ..., F \neq 0$

Dôkaz: Použijeme L'Hospitalovo pravidlo a fakt, že konštanty $A, \dots, F$ možno vyňať pred limitu: (v dôkaze ich nebudeme uvažovať)

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^\gamma(\ln n)}{\ln^\delta n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma \ln^{\gamma-1}(\ln n) \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{\delta \ln^{\delta-1}(n) \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\gamma}{\delta} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{\gamma-1}(\ln n)}{\ln^\delta n} =$

$= \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\gamma-1}{\delta} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{\gamma-2}(\ln n)}{\ln^\delta n} = \dots = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\gamma-1}{\delta} \cdot \dots \cdot \frac{\gamma-(k-1)}{\delta} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{\gamma-k}(\ln n)}{\ln^\delta n}$.

Raz sa stane $\gamma - k \le 0$ a tým výpočet limity končí. V čitateli je konštanta a v menovateli zostáva $\ln^\delta n \cdot \ln^{k-\gamma}(\ln n)$, ktoré ide k $+\infty$. Preto platí: $\ln^\gamma(\ln n) \prec \ln^\delta$, pre $\gamma, \delta > 0$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^\delta n}{n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta \ln^{\delta-1} n \cdot \frac{1}{n}}{\beta n^{\beta-1}} = \frac{\delta}{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{\delta-1} n}{n^\beta} =$

$= \frac{\delta}{\beta} \cdot \frac{\delta-1}{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{\delta-2} n}{n^\beta} = \dots = \frac{\delta}{\beta} \frac{\delta-1}{\beta} \cdot \dots \cdot \frac{\delta-(k-1)}{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{\delta-k} n}{n^\beta}$.

Raz sa stane $\delta - k \le 0$ a tým výpočet limity končí. V čitateli je konštanta a v menovateli zostáva $n^\beta \cdot \ln^{k-\delta} n$, ktoré ide k $+\infty$. Preto platí: $\ln^\delta n \prec n^\beta$, pre $\delta, \beta > 0$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta \cdot \beta^{n-1}}{\alpha^n \cdot \ln \alpha} = \frac{\beta}{\ln \alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta-1}}{\alpha^n} =$

$= \frac{\beta}{\ln \alpha} \cdot \frac{\beta-1}{\ln \alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta-2}}{\alpha^n} = \dots = \frac{\beta}{\ln \alpha} \cdot \frac{\beta-1}{\ln \alpha} \cdot \dots \cdot \frac{\beta-(k-1)}{\ln \alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta-k}}{\alpha^n}$.

Raz sa stane $\beta - k \le 0$ a tým výpočet limity končí. V čitateli je konštanta a v menovateli zostáva $\alpha^n \cdot n^{k-\beta}$, ktoré ide k $+\infty$. Preto platí: $n^\beta \prec \alpha^n$, pre $\beta > 0$, $\alpha > 1$.

Použijeme Stirlingovu formulu a vetu o minoritnej a majoritnej funkcii.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha e)^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}$.

Platí: $\frac{1}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} \le \frac{(\alpha \cdot e)^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n} \le \left(\frac{\alpha \cdot e}{n}\right)^n \le \frac{\alpha \cdot e}{n}$, pre $n \ge \alpha \cdot e$. Limity "krajných"funkcií sú rovné 0, preto platí $\alpha^n \prec n!$.

Opäť použijeme Stirlingovu formulu a L'Hospitalovo pravidlo ...

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = \sqrt{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n} = \sqrt{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}}}{e^n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} e^n} = 0$. Preto $n! \prec n^n$. $\square$

- $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$
- Tvr.: $0 < f(n) \le g(n) \le h(n)$ & $f(n) \sim h(n) \Rightarrow g(n) \sim f(n),\ g(n) \sim h(n)$
- Tvr.: $0 < f(n) \le g(n) \le h(n)$ & $f(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow$

$g(n) = \Theta(f(n)),\ g(n) = \Theta(h(n))$

- **Derivácie vybraných funkcií:**
  - $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \quad (f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$
  - $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad (x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  - $(\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
  - zložená funkcia: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
  - súčin: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
  - podiel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- **Integrály vybraných funkcií:**
  - *Substitučná metóda*: vychádza z derivácie zloženej funkcie, t.j. $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

    Preto

    $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x) + C$, kde $F(x)$ je primitívna funkcia k f, t.j. $F = \int f$.

    Pri výpočte sa zavedie substitúcia $t = g(x)$, $\mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x$ a integrál sa prevedie na $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c$. Spätným prechodom k premennej x dostávame výsledok $F(g(x)) + C$.
  - *Metóda per-partes*: vychádza zo vzťahu pre deriváciu súčinu dvoch funkcií, t.j. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

    Preto

    $\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$.

    Pri výpočte sa integrovaná funkcia napíše v tvare $u \cdot v'$, kde u a v' sú zvolené tak, že k v' vieme nájsť primitívnu funkciu v a následne použijeme vzťah $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$.
  - $\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, pre $n \neq -1$ • $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
  - $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$ • $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Praktické výpočty O, Ω, Θ, o, $\prec$, $\sim$, $\asymp$

- $f = o(g)$: vypočítať $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$. Ak existuje a je nulová, tak $f = o(g)$.
- $f = \Omega(g)$:
  - ak $f = \omega(g)$, tak $f = \Omega(g)$,
  - ekvivalentné s overovaním $g = O(f)$,
  - nájdenie C, n_0 z definície pomocou odhadov zdola.
- $f = O(g)$:
  - buď použiť tvrdenie, ak $f = o(g)$, tak $f = O(g)$,
  - alebo pomocou odhadov zhora nájsť C, n_0 z definície

- $f \sim g$: vypočítať $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$. Ak existuje a rovná sa 1, tak $f \sim g$.
- $f \prec g$: ekvivalentné s overovaním $f = o(g)$
- $f \asymp g$: ekvivalentné s overovaním $f = \Theta(g)$
- $f = \Theta(g)$:
  - vypočítať $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$. Ak existuje a je nenulová, tak $f = \Theta(g)$,
  - ekvivalentné s overovaním $f = O(g)$ a $f = \Omega(g)$,
  - pomocou odhadov zdola nájsť C_1, n_1, pomocou odhadov zhora nájsť C_2, n_2, potom C_1, C_2 a $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ sú parametre z definície.

Odhady $\sum_{i=1}^{n} f(i)$

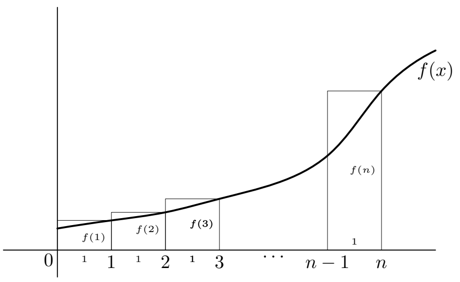
- Neklesajúce (rastúce), nerastúce (klesajúce) funkcie:

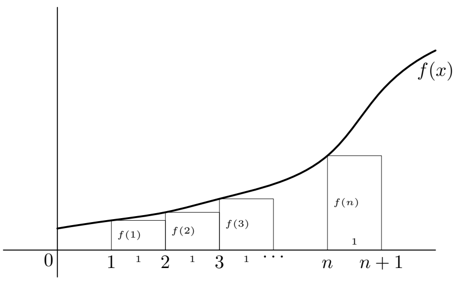
  - $f(i)$ možno odhadnúť obdĺžnikom so stranami "so súradnicami"$i, i+1$; $f(i), f(i)$, t.j. obsah je $f(i)$. Pre neklesajúce funkcie na intervale $[i, i+1]$ je takto odhadnutý obsah $f(i)$ menší rovný ako $\int_i^{i+1} f(x)\mathrm{d}x$, pre nerastúce na $[i, i+1]$ zase väčší rovný.

  - $f(i)$ možno tiež odhadnúť obdĺžnikom so "so súradnicami"$i-1, i$; $f(i), f(i)$, t.j. obsah je $f(i)$. Pre neklesajúce funkcie na intervale $[i-1, i]$ je obsah $f(i)$ väčší rovný ako $\int_{i-1}^{i} f(x)\mathrm{d}x$, pre nerastúce na $[i-1, i]$ menší rovný.

  - neklesajúca funkcia na [0,n+1]:

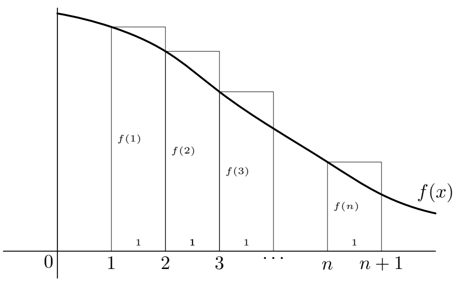
$$\int_0^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x.$$

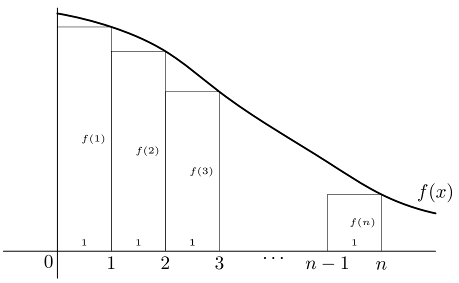




  - nerastúca funkcia na [0,n+1]:

$$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_0^n f(x)\mathrm{d}x.$$





- Problémy:
  - Funkcia nie je ani neklesajúca ani nerastúca:

    rozdeliť na monotónne podintervaly, na ktorých je neklesajúca, či nerastúca a aplikovať predošlý výpočet na každý z takýchto podintervalov.

- Integrál vychádza nekonečno:

  vynechať tie podintervaly, ktoré spôsobujú problém a nahradiť ich priamo odhadovanou hodnotou $f(i)$, napr. $\sum_i 1/i$ - problematický je interval [0,1], preto horné ohraničenie pre nerastúcu funkciu dostaneme ako $f(1) + \int_1^n f(x)$.

- Určenie asymptotického rastu výsledku:
  - ak $\lim_{n\to\infty} F(n) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = 1$, tak $\sum \sim F(n)$
  - ak $\lim_{n\to\infty} F(n) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} \neq 0$, tak $\sum = \Theta(F(n))$
  - $a = 1$: $\sum \sim F(n)$
  - $a \neq 1$: $\sum = \Theta(F(n))$

- ak $\lim_{n\to\infty} F(n) = a \in \mathbb{R}$, tak $\sum = \Theta(1)$.

- ak $\lim_{n\to\infty} F(n) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = +\infty$ alebo $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = 0$, tak nemožno použiť túto metódu.

Odhady $\sum_{i=1}^{\sqrt[k]{n}} f(i)$

- Postupujeme ako v predošlom prípade len $\sqrt[k]{n}$ nahrádzame $[\sqrt[k]{n}]$ - (dolná) celá časť. Dostávame ohraničenia ako funkciu $[\sqrt[k]{n}]$

- Použitím nerovností $\sqrt[k]{n} - 1 < [\sqrt[k]{n}] \leq \sqrt[k]{n}$ dostaneme horné i dolné ohraničenie ako funkciu $\sqrt[k]{n}$. **Pozor!** Ak dosádzame do výrazu $V(x)$, ktorý predstavuje klesajúcu (nerastúcu) funkciu s argumentom $[\sqrt[k]{n}]$, napr. $\frac{1}{[\sqrt[k]{n}]}$, tak treba dosádzať opačne, čiže platí $V(\sqrt[k]{n}) \leq V([\sqrt[k]{n}]) \leq V(\sqrt[k]{n} - 1)$.

- Použitím tohto faktu máme, že pre
  - neklesajúcu funkciu f s nerastúcou primitívnou funkciou F:

    $$F(\sqrt[k]{n}) - F(0) \leq \sum_{i=1}^{[\sqrt[k]{n}]} f(i) \leq F(\sqrt[k]{n}) - F(1).$$

  - neklesajúcu funkciu f s neklesajúcou primitívnou funkciou F:

    $$F(\sqrt[k]{n} - 1) - F(0) \leq \sum_{i=1}^{[\sqrt[k]{n}]} f(i) \leq F(\sqrt[k]{n} + 1) - F(1).$$

  - nerastúcu funkciu f s neklesajúcou primitívnou funkciou F:

    $$F(\sqrt[k]{n}) - F(1) \leq \sum_{i=1}^{[\sqrt[k]{n}]} f(i) \leq F(\sqrt[k]{n}) - F(0).$$

  - nerastúcu funkciu f s nerastúcou primitívnou funkciou F:

    $$F(\sqrt[k]{n} + 1) - F(1) \leq \sum_{i=1}^{[\sqrt[k]{n}]} f(i) \leq F(\sqrt[k]{n} - 1) - F(0).$$

- Určenie rastu:
  - $\lim_{n\to\infty} F(n) = +\infty$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = 1$, tak $\sum \sim F(\sqrt[k]{n})$
  - $\lim_{n\to\infty} F(n) = +\infty$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = a \neq 0$, tak $\sum = \Theta(F(\sqrt[k]{n}))$
  - $\lim_{n\to\infty} F(n) = a \in \mathbb{R}$, tak $\sum = \Theta(1)$.
- $(\lfloor x \rfloor)^n \sim x^n \sim (\lceil x \rceil)^n$, pre $n > 0$
  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ a $(x-1)^n \sim x^n$,
  keďže $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^n}{x^n} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x}\right)^n = 1$
  $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ a $(x+1)^n \sim x^n$,
  keďže $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^n}{x^n} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x}\right)^n = 1$
  Použila sa veta o limite zloženej funkcie.
- $\ln(\lfloor x \rfloor) \sim \ln x \sim \ln(\lceil x \rceil)$,
  keďže $\ln(x-1) \sim \ln x \sim \ln(x+1)$.
  (Ukáže sa to pomocou L'Hospitalovho pravidla.)
- ak $f \sim \hat{f}$, $g \sim \hat{g}$, tak $f \cdot g \sim \hat{f} \cdot \hat{g}$
  Proste $\lim \frac{f\cdot g}{\hat{f}\cdot\hat{g}} = (\lim \frac{f}{\hat{f}}) \cdot (\lim \frac{g}{\hat{g}}) = 1 \cdot 1 = 1$. (Veta o limite súčinu.)

Cvičenia

- 1. Dokážte nasledujúce tvrdenia (symboly O, Ω, Θ sú definované cez "ε, n_0"):

(a) ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) = O(g(n))$

(a') Zistite, či platí opačné tvrdenie, t.j. ak $f(n) = O(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$. Ak nie, nájdite funkcie pre ktoré to neplatí.

(b) ak $f = \Theta(g)$ práve vtedy, keď $f = O(g)$ & $g = O(f)$

(c) ak $f = \Omega(g)$ práve vtedy, keď $g = O(f)$

(d) ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \neq 0$, tak $f \in \Theta(g)$

(e) Dokážte tranzitívnosť symbolov $O, \Theta, \Omega, \sim, \prec, \asymp, o, \omega$, t.j.

- ak $f = O(g)$ & $g = O(h)$, tak $f = O(h)$,
- ak $f = \Theta(g)$ & $g = \Theta(h)$, tak $f = \Theta(h)$,
- ak $f = \Omega(g)$ & $g = \Omega(h)$, tak $f = \Omega(h)$,
- ak $f = o(g)$ & $g = o(h)$, tak $f = o(h)$,
- ak $f = \omega(g)$ & $g = \omega(h)$, tak $f = \omega(h)$,
- ak $f \prec g$ & $g \prec h$, tak $f \prec h$,
- ak $f \sim g$ & $g \sim h$, tak $f \sim h$,
- ak $f \asymp g$ & $g \asymp h$, tak $f \asymp h$,

(f) ak $0 < f(n) \leq g(n) \leq h(n)$ & $f(n) \sim h(n)$, tak $g(n) \sim f(n)$, $g(n) \sim h(n)$

(h) ak $0 < f(n) \leq g(n) \leq h(n)$ & $f(n) = \Theta(h(n))$, tak

$$g(n) = \Theta(f(n)),\ g(n) = \Theta(h(n))$$

• 2. Ukážte nasledujúce vzťahy:

(a) $x^2 = o(x^5)$
(b) $\sin(x) = o(x)$
(c) $\sin(x) = O(1)$
(d) $14{,}709\sqrt{x} = o(x/2 + 7\cos x)$
(e) $1/x = o(1)$
(f) $2^n = o(n!)$
(g) $x^3 + 5x^2 + 77cosx = O(x^5)$
(h) $\frac{1}{1+x^2} = O(1)$
(i) $n = o(2^n)$
(j) $\ln\ln n = o(\ln n)$
(k) $23\ln x = o(x^{0{,}02})$

• 3. Dokážte, že (nájsť C_1, C_2, n_0, či C, n_0)

(a) $(x+1)^2 = \Theta(3x^2)$,
(b) $\frac{x^2+5x+7}{5x^3+7x+2} = \Theta\left(\frac{1}{x}\right)$
(c) $x^4 - 13x^3 + 22x^2 - 17x - 100 = \Theta(x^4)$,
(d) $2x^3 + x^2 + 7x + 10 = \Theta(x^3)$
(e) $x^5 - 7x^3 + 10x^4 - 100x^2 + 90x + 300 = O(x^6)$,
(f) $x^4 - 100x^3 - 20x^2 - 15x + 1000 = \Omega(x^2)$

• 4. Zistite, či platí:

(a) $\sqrt{7 + \sqrt{3x}} = \Theta(x^{1/4})$,
(b) $\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \Theta(1)$,
(c) $(x^2 + 3x + 2)^4 \sim x^8$,
(d) $x^3(\ln\ln x)^3 = o(x^3 \ln x)$,
(e) $\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^2+1} = o(1)$,
(f) $\sqrt{\ln x + 1} = \Omega(\ln\ln x)$

• 5. Usporiadajte v relácii $\prec$ nasledujúce funkcie:

(a) $\ln\ln n$, n, $\ln n$, 2^n, $n!$,

(b) $2^{\sqrt{n}}$, $e^{\ln n^3}$, $n^{3{,}01}$, 2^{n^2},

(c) $n^{1{,}6}$, $\ln n^3 + 1$, $\sqrt{n!}$, $n^{3\ln n}$,

(d) $n^3 \ln n$, $(\ln\ln n)^3$, $n^5 2^n$, $(n+4)^{12}$

• 6. Rozhodnite o vzťahu (O, Ω, Θ, o):

(a) $\sin x$, 1
(b) $x^2 + 7\ln x + e^{\ln x}$, x^3
(c) $x^3 + 55x^2 + \ln x^2$, x^5
(d) $x^{\ln x}$, x^{100}

• 7. Odhadnite sumy:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i^2$,
(b) $\sum_{i=1}^{n} i^k$, $k > 0$,
(c) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i}$,
(d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$,
(e) $\sum_{i=1}^{n} i^k$, $k < 0$ (Pozor $k = -1$),
(f) $\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{i}}$,
(g) $\sum_{i=1}^{n} \ln i$,
(h) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-5{,}5)^2}$,
(i) $\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} (\ln i + i)$,
(j) $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{j} + \frac{3}{j^2} + \frac{4}{j^3}\right)$

Riešené príklady

Príklad
Dokážte, že $13x^7 - 10x^6 - 22x^5 + 100x^4 + 1024x^3 - 23x^2 + 8x + 65536 = O(x^7)$.

Riešenie:

Potrebujeme nájsť $C > 0$ a x_0 také, že pre každé $x > x_0$ bude platiť:

$$|13x^7 - 10x^6 - 22x^5 + 100x^4 + 1024x^3 - 23x^2 + 8x + 65536| \le C|x^7|.$$

Použijeme vzťahy $|a + b| \le |a| + |b|$ a $|a - b| \le |a| + |b|$.

T.j. $P := |13x^7 - 10x^6 - 22x^5 + 100x^4 + 1024x^3 - 23x^2 + 8x + 65536| \le |13x^7| + |10x^6| + |22x^5| + |100x^4| + |1024x^3| + |23x^2| + |8x| + |65536|$.

Pre $x \ge 0$ môžeme absolútne hodnoty odstrániť. Pre $x \ge 1$ zase možno x^k, $k < 7$ nahradiť priamo x^7.

Preto $P \le 13x^7 + 10x^7 + 22x^7 + 100x^7 + 1024x^7 + 23x^7 + 8x^7 + 65536x^7 \le (13 + 10 + 22 + 100 + 1024 + 23 + 8 + 65536)x^7 = 66736x^7$.

Záver: pre $C = 66736$ a $x_0 = \max\{0, 1\} = 1$ platí $13x^7 - 10x^6 - 22x^5 + 100x^4 + 1024x^3 - 23x^2 + 8x + 65536 = O(x^7)$.

iný spôsob riešenia

Predpokladáme, že

1. od x_1 je $13x^7 - 10x^6 - 22x^5 + 100x^4 + 1024x^3 - 23x^2 + 8x + 65536 \ge 0$. Výraz prepíšeme napr. takto $10x^7 + (x^7 - 10x^6) + (x^7 - 22x^5) + (x^7 - 23x^2) + \ldots$, čo je pre $x \ge 10$ a $x^2 \ge 22$ a $x^5 \ge 23$ určite väčšie rovné 0. Preto $x_1 = 10$.
2. od x_2 je $x^7 \ge 0$, t.j. $x_2 = 0$.

Tieto 2 podmienky nám zabezpečia, že v odhadoch nebudeme musieť uvažovať absolútne hodnoty. Následne odhadujeme zhora pre $x > x_1, x_2$. Z bodu 2. možno vynechať členy so zápornými koeficientami, ktoré nám znižujú hodnotu výrazu. Dostávame $P \le 13x^7 + 100x^4 + 1024x^3 + 65536$. Potom pre $x > 10, 0, 1$ máme $P \le 13x^7 + 100x^7 + 1024x^7 + 65536x^7 = 66673$, $x_0 = \max\{10, 0, 1\}$.

Záver: pre $x_0 = 10$ a $C = 66673$ máme $P = O(x^7)$.

Príklad
Dokážte, že $13x^7 - 10x^6 - 22x^5 + 100x^4 + 1024x^3 - 23x^2 + 8x + 65536 = \Omega(x^7)$.

Riešenie:

Opäť sa zbavíme absolútnych hodnôt, ako v predošlom príklade. Potom pre $x \ge 0, 1, 10$ odhadujeme zdola:

$13x^7 - 10x^6 - 22x^5 + 100x^4 + 1024x^3 - 23x^2 + 8x + 65536 \ge 13x^7 - 10x^6 - 22x^54 - 23x^2 \ge 13x^7 - 10x^6 - 22x^6 - 23x^6 = 12x^7 + x^7 - 55x^6$. (Pre nezáporné x sme sa zbavili výrazov s kladnými koeficientami, ktoré nám zvyšovali hodnotu výrazu a pre $x \ge 1$ sme nahrádzali všetky mocniny v členoch so zápornými koeficientami x^6, čím sme znižovali hodnotu výrazu.) V prípade, že $x^7 - 55x^6 \ge 0$, môžeme v odhade aj tento člen vynechať, t.j. ak $x \ge 55$, tak $P \ge 12x^7$.

Záver: Pre $C = 12$ a $n_0 = \max\{10, 0, 1, 55\} = 55$ máme $P = \Omega(x^7)$.

Príklad
Dokážte, že $13x^7 - 10x^6 - 22x^5 + 100x^4 + 1024x^3 - 23x^2 + 8x + 65536 = \Theta(x^7)$.

Riešenie:

Pomocou výsledkov z predošlých 2 príkladov máme, že napr. pre $C_1 = 12$, $x_{01} = 55$ je $P = \Omega(x^7)$ a pre $C_2 = 66673$ a $x_{02} = 10$ máme $P = O(x^7)$. Preto pre $C_1 = 12$, $C_2 = 66673$ a $x_0 = \max\{55, 10\} = 55$ máme $P = \Theta(x^7)$.

Príklad
Dokážte, že platí: $x^5 - 100x^4 + 20x^3 - 200x^2 - 10x - 50 = \Omega(x^2)$.

Riešenie:

Označme $P := x^5 - 100x^4 + 20x^3 - 200x^2 - 10x - 50$. Postupujeme úplne rovnako, ako keby sme odhadovali $P = \Omega(x^5)$, pretože ak už raz budeme mať, že $C|x^5| \le |P|$, tak pre $x > 1$ bude tiež platiť $C|x^2| \le C|x^5| \le |P|$.

Čiže, opäť sa zbavíme absolútnych hodnôt, napríklad takto: $P = (\frac{1}{4}x^5 - 100x^4) + 20x^3 + (\frac{1}{4}x^5 - 200x^2) + (\frac{1}{4}x^5 - 10x) + (\frac{1}{4}x^5 - 50)$. Ak každý z výrazov bude nezáporný, tak určite P bude nezáporné. Toto nastane pre $x \ge 200$, $x \ge 0$, $x^3 \ge 800$, $x^4 \ge 40$ a $x^5 \ge 200$, t.j. pre $x \ge 200$.

Ďalej pre $x \ge 1, 200$ odhadujeme zdola. Platí $P \ge x^5 - 100x^4 - 200x^2 - 10x - 50 \ge x^5 - (100 + 200 + 10 + 50)x^4 = x^5 - 360x^4$. Zvolíme $0 < C < 1$. $P \ge Cx^5 + (1-C)x^5 - 360x^4$. Ak $(1-C)x^5 - 360x^4 \ge 0$, tak môžeme tento výraz vynechať v odhadoch zdola. To bude pre $x \ge \frac{360}{1-C}$. Preto pre pevne zvolené $0 < C < 1$ a $x_0 = \max\{200, \frac{360}{1-C}\}$ máme $|P| \ge C|x^5|$. Nakoniec pre $x \ge 1, x_0$ máme C a $\max\{x_0, 1\}$, ktoré nám zabezpečí, že $P = \Omega(x^2)$. Keď za C zvolíme napr. $\frac{1}{2}$, tak x_0 bude rovné 720.

Príklad

Dokážte, že ak $f = o(g)$, tak $f = O(g)$.

Riešenie:

Vyjdeme z definície symbolu o, t.j. $f = o(g) \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Z definície limity pre funkciu $\frac{f}{g}$ platí:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)\colon \forall n > n_0(\varepsilon)\ |\frac{f(n)}{g(n)} - 0| < \varepsilon$, t.j. $\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \frac{|f(n)|}{|g(n)|} < \varepsilon$, $|f(n)| \le \varepsilon |g(n)|$.

Aby sme dostali konkrétne C a n_0, tak pevne zvolíme ε, napr. 1, k nemu máme $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Príklad

Dokážte, že ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$, tak $f = \Theta(g)$. (Pre funkcie f, g od istého N_0 kladné.)

Riešenie:

Vyjdeme z definície limity, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)\colon \forall n > n_0(\varepsilon),\ \left|\frac{f(n)}{g(n)} - a\right| < \varepsilon.$$

Odstránením absolútnej hodnoty máme, že $-\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \varepsilon$, t.j.

$a - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < a + \varepsilon$. Pre $n \ge N_0$ možno nerovnosť násobiť $g(n)$, čiže

$(a-\varepsilon)g(n) < f(n) < (a+\varepsilon)g(n)$.

Aby sme dostali konkrétne C_1, C_2, n_0, tak opäť pevne zvolíme ε, tentokrát tak, aby $a - \varepsilon > 0$. Potom $C_1 = a - \varepsilon$, $C_2 = a + \varepsilon$ a $n_0 = \max\{n_0(\varepsilon), N_0\}$.

Príklad

Dokážte, že ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \ne 0$, tak $f = \Theta(g)$.

Riešenie:

Vyjdeme z definície limity, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)\colon \forall n > n_0(\varepsilon),\ \left|\frac{f(n)}{g(n)} - a\right| < \varepsilon.$$

Použijeme vzťah $|\,|a| - |b|\,| \le |a - b|$, t.j. $\left|\,\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| - |a|\right| \le \left|\frac{f(n)}{g(n)} - a\right| < \varepsilon$.

Odstránením absolútnej hodnoty máme, že $-\varepsilon < \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| - |a| < \varepsilon$, t.j.

$|a| - \varepsilon < \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \frac{|f(n)|}{|g(n)|} < |a| + \varepsilon$. Prenásobíme nerovnosť $|g(n)|$, čiže

$(|a| - \varepsilon)|g(n)| < |f(n)| < (|a| + \varepsilon)|g(n)|$.

Aby sme dostali konkrétne C_1, C_2, n_0, tak opäť pevne zvolíme ε, tentokrát tak, aby $|a| - \varepsilon > 0$. Potom $C_1 = |a| - \varepsilon$, $C_2 = |a| + \varepsilon$ a $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Príklad

Dokážte, že ak $f = \Omega(g)$ a $g = \Omega(h)$, tak $f = \Omega(h)$, t.j. tranzitívnosť symbolu Ω.

Riešenie:

Z definície symbolu Ω máme:

$$C_1 > 0 \text{ a } n_{01} \in \mathbb{N} \text{ také, že } \forall\, n > n_{01}\ C_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)|,$$
$$C_2 > 0 \text{ a } n_{02} \in \mathbb{N} \text{ také, že } \forall\, n > n_{02}\ C_2 \cdot |h(n)| \leq |g(n)|.$$

Preto $|f(n)| \geq C_1 \cdot |g(n)| \geq C_1 \cdot C_2 \cdot |h(n)|$, pre $n > \max\{n_{01}, n_{02}\}$.

Záver: Hľadané $C = C_1 \cdot C_2$ a $n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$.

Príklad

Usporiadajte nasledujúce funkcie podľa asymptotického rastu, t.j. v relácii $\prec$: $n^{\ln n}, (\ln n)^n, 4^{\frac{n}{2}}, \sqrt[5]{n!}$.

Riešenie:

Skúsme upraviť všetky funkcie v tvare mocnín e:

$n^{\ln n} = (e^{\ln n})^{\ln n} = e^{\ln^2 n}$,

$(\ln n)^n = e^{n \cdot \ln \ln n}$,

$4^{\frac{n}{2}} = e^{\ln 4 \cdot \frac{n}{2}} = e^{n \cdot \ln 2}$,

$\sqrt[5]{n!} = e^{\frac{1}{5}\ln n!} = e^{\frac{1}{5}\left(\ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right)} = e^{\frac{1}{5}\left(\ln\sqrt{2\pi n} + \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)} = e^{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi + \ln n) + n \ln \frac{n}{e}\right)} =$
$= e^{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi + \ln n) + n(\ln n - \ln e)\right)} = e^{\frac{1}{5} n \ln n - \frac{1}{5} n + \frac{1}{10}\ln n + \frac{\ln 2\pi}{10}}$.

Nie je ťažké vidieť, že limity exponentov, keď $n \to \infty$ sú rovné $+\infty$ a možno ich usporiadať podľa relácie $\prec$ (o) - stačí porovnávať signifikantné členy (prečo?). Za týchto predpokladov platí, že $f \prec g \Rightarrow e^f \prec e^g$. ($\lim \frac{e^f}{e^g} = \lim e^{f-g} = \lim e^{g(-1+\frac{f}{g})}$. Limita exponentu je podľa vety o súčine funkcií rovná $-\infty$, keďže $\lim g = +\infty$ a $\lim(-1 + \frac{f}{g}) = -1 + 0 = -1$. Pomocou vety o limite zloženej funkcie pre e^x dostávame, že výsledná limita je rovná 0, keďže $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.)

$$\ln^2 n, \quad n \cdot \ln \ln n, \quad \ln 2 \cdot n, \quad \tfrac{1}{5} n \ln n - \tfrac{1}{5} n + \tfrac{1}{10} \ln n + C, \text{ kde } C := \tfrac{1}{10} \ln 2\pi$$

Priamo z hierarchie funkcií máme, že $\ln^2 n \prec \ln 2 \cdot n$.

Z $\ln 2 \prec \ln \ln n$ platí $n \cdot \ln 2 \prec n \cdot \ln \ln n$.

Opäť z hierarchie funkcii vyplýva $\ln \ln n \prec \ln n$, preto $n \ln \ln n \prec \frac{1}{5} n \ln n$.

Záver: $n^{\ln n} \prec 4^{\frac{n}{2}} \prec (\ln n)^n \prec \sqrt[5]{n!}$.

Príklad

Zistite asymptotický rast funkcie $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.

Riešenie:

Funkcia $g(x) = \frac{1}{x^2}$ je na intervale $(0, \infty)$ klesajúca. Preto pre odhad platí:

$$\int_1^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} g(i) \leq \int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primitívna funkcia k funkcii $g(x)$ je rovná $G(x) := -\frac{1}{x} + C$ (použije sa vzorec pre x^{-2}).

Vidíme, že nie je definovaná v bode 0, preto by sa hodnota integrálu s hranicou 0 počítala ako limita sprava (0^+) a jej hodnota by bola nekonečno, čiže horná hranica by nám nedala odpoveď v závislosti od n, bola by stále rovná $+\infty$.

Preto upresníme odhad:

$$\int_1^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} g(i) \leq g(1) + \int_1^n g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Po dosadení do vzťahu máme:

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad g(1) + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Platí: $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$, pre $n \geq 1$. Preto $f(n) = \Theta(1)$.

Príklad

Zistite asymptotický rast funkcie $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \ln i$.

Riešenie:

Funkcia $g(x) = \ln x$ je na intervale $(0, \infty)$ rastúca. Preto pre odhad platí:

$$\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} g(i) \leq \int_1^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primitívnu funkciu k $\ln x$ možno dostať pomocou metódy per-partes:

$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{vmatrix} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$

Hoci primitívna funkcia nie je definovaná v 0, existuje konečná jednostranná limita $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$. Preto môžeme predošlý vzorec použiť priamo pre odhad sumy.

Jednoduchší spôsob (nebude sa musieť pomocou L'Hospitalovho pravidla počítať limita) vyjde, ak jednoducho v dolnom odhade pre interval $(0,1)$ použijeme priamo funkčnú hodnotu v bode 1, čiže $\ln 1 + \int_1^n g(n)$. Výpočet sa bude líšiť od predošlého o nejakú konštantu C.

Dolná hranica: $\int_0^n \ln x \, \mathrm{d}x = [x \ln x - x]_0^n = (n \ln n - n) - \lim_{x\to 0^+} (x \ln x - x) = n \ln n - n$.

Horná hranica:

$\int_1^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x = [x \ln x - x]_1^{n+1} = (n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1 = n \ln(n+1) - n + \ln(n+1)$.

Takže:

$$n \ln n - n \le \sum_{i=1}^n \ln i \le n \ln(n+1) - n + \ln(n+1).$$

Vidíme, že obe strany sa „podobajú“ na $n \ln n - n$. Ak sa nám podarí dokázať, že horná a dolná hranica je v relácii $\sim$ s touto funkciou, tak podľa vety o dvoch policajtoch môžeme tvrdiť, že aj $f(n) = \sum_{i=1}^n \ln i$ je v relácii $\sim$ s funkciou $n \ln n - n$.

Dolná hranica sa priamo rovná $n \ln n - n$, čiže podiel je rovný 1 a limita konštantnej postupnosti zloženej zo samých jednotiek je tiež 1.

Pre hornú hranicu vypočítame

(každý člen v limite vydelíme výrazom $n \ln n$ a použijeme $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln(n+1) - n + \ln(n+1)}{n \ln n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n}}{1 - \frac{1}{\ln n}} = 1.$$

Záver: $f(n) \sim n \ln n - n$.

Poznámka 1: Vypočítaný vzťah predstavuje základný odhad Stirligovho vzorca pre $n!$, keďže $\ln n! = \sum_{i=1}^n \ln i \sim n \ln n - n = n \ln n - n \ln e = n \ln \left(\frac{n}{e}\right) = \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Poznámka 2: Pre reláciu $\sim$ sú podstatné len signifikantné členy porovnávaných funkcií. Preto k $n \ln n - n$ možno pripočítať akúkoľvek funkciu, ktorá je v asymptoticky menšia ako $n \ln n$ a dostaneme iné „riešenie úlohy“.

Príklad

Zistite asymptotický rast funkcie $f(n) = \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt[3]{2i}}$.

Riešenie:

$f(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt[3]{2i}} = \sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{\sqrt[3]{2i}}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť z x. Podľa definície, je to najväčšie celé číslo menšie rovné x, čiže $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$. Funkcia $g(n) := \frac{1}{\sqrt[3]{2n}}$ je na $(0, \infty)$ klesajúca. Primitívna funkcia k funkcii g je

$G(x) := \int g(x) \, \mathrm{d}x = \int 2^{-\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}x = 2^{-\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}} x^{\frac{2}{3}} + C$.

Táto funkcia je definovaná v 0, preto nebudú žiadne problémy s intervalom $(0,1)$.

Pre odhad $f(n)$ máme:

$$\int_1^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1} g(x) \, \mathrm{d}x \le f(n) \le \int_0^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} g(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Po dosadení máme:

$$G(\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1) - G(1) \le f(n) \le G(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) - G(0)$$

Funkcia G je rastúca, preto keď nahradíme v jej argumente výskyt $\lfloor\sqrt{n}\rceil$ hodnotami menšími, či väčšími, tak sa jej hodnota patrične zmení, čiže zmenší alebo zväčší sa. Takže:

$$G(\sqrt{n}-1+1)-G(1) \leq G(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)-G(1) \leq f(n) \leq G(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)-G(0) \leq G(\sqrt{n})-G(0)$$

$$G(\sqrt{n})-G(1) \leq f(n) \leq G(\sqrt{n})-G(0),$$

t.j.

$$\frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}(\sqrt{n})^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}} \leq f(n) \leq \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}(\sqrt{n})^{\frac{2}{3}}$$
$$\frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}n^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} - \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}n^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}} \leq f(n) \leq \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}n^{\frac{1}{3}}.$$

Záver: $f(n) \sim \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}n^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}\sqrt[3]{n}.$

Príklad *Určte asymptotický rast sumy*

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}}(i+\ln i) = \sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}(i+\ln i).$$

Riešenie:

$f(x) := x + \ln x$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, pre $x \in \mathbb{R}^+$, teda $f(x)$ je rastúca na $(0, \infty)$.
Hranice: $k := \lfloor\sqrt{n}\rfloor$

$$\int_0^k (x+\ln x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{k}(i+\ln i) \leq \int_1^{k+1}(x+\ln x)\,\mathrm{d}x$$

(per partes)
$F(x) = \int(x+\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + x\ln x - x + C$

Dolná hranica: hoci $F(x)$ nie je v bode 0 definovaná, ale je spojitá v bode 0, preto ju možno tzv. spojite dodefinovať. Druhý spôsob ako sa vyhnúť problémom s nulovou hranicou je $1 + \ln 1 + \int_1^k (x+\ln x)\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2}k^2 + k\ln k - k - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}k^2 + k\ln k - k + \frac{3}{2}$ Výsledky sa budú líšiť o konštantu, čo v tomto prípade nemá vplyv na asymptotický rast. (2. odhad by mal byť presnejší.)

Horná hranica: $\frac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1)\ln(k+1) - (k+1) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{2} + k\ln(k+1) + \ln(k+1) - k - 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}k^2 + k\ln(k+1) + \ln(k+1)$.

Dosadíme $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ za k:
$D := \frac{1}{2}(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)^2 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor\ln(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$

Dolnú hranicu odhadneme zdola tak, že do rastúcich funkcii $\frac{1}{2}x^2$ a $x\ln x$ dosadíme $\sqrt{n}-1$ a do klesajúcej funkcie $-x$ dosadíme $\sqrt{n}$.
$D \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{n}-1\right)^2 + (\sqrt{n}-1)\ln(\sqrt{n}-1) - \sqrt{n} = \frac{1}{2}n - 2\sqrt{n} + \frac{1}{2} + \sqrt{n}\ln(\sqrt{n}-1)$

Všetky funkcie vystupujúce v hornej hranici sú rastúce, preto do nich dosádzame priamo $\sqrt{n}$, aby sme ju odhadli zhora.
$H \leq \frac{1}{2}n + \sqrt{n}\ln(\sqrt{n}+1) + \ln(\sqrt{n}+1)$.

Preto platí:
$\frac{1}{2}n + \sqrt{n}\ln(\sqrt{n}-1) - 2\sqrt{n} + \frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^{\sqrt{n}}(i+\ln i) \leq \frac{1}{2}n + \sqrt{n}\ln(\sqrt{n}+1) + \ln(\sqrt{n}+1)$.

Signifikantná funkcia v odhadoch je $\frac{1}{2}n$. Pre spresnenie odhadu možno ešte dodať člen $\sqrt{n}\ln\sqrt{n} = \frac{1}{2}\sqrt{n}\ln n$.

Záver: $\sum_{i=1}^{\sqrt{n}}(i+\ln i) \sim \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}\ln n.$