# Grafy a quicksort[1]

## Teoretická časť

• *Graf*: usporiadaná dvojica $(V, E)$, kde $V$ je množina vrcholov a $E$ je množina hrán, t.j. neusporiadaných dvojíc vrcholov.

- uvažujú sa *jednoduché* (nemá viacnásobné hrany medzi dvoma vrcholmi) neorientované grafy bez slučiek (hrán z vrchola do samého seba).

• *Stupeň vrchola $v$*: $\deg(G)$ - počet hrán s ním incidentných
• *Podgraf grafu $G = (V, E)$*: $G' = (V', E')$, kde $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.
• *Faktor*: podgraf grafu $G = (V, E)$, ktorého vrcholová množina je rovná $V$.
• *Kompletný graf na $n$ vrcholoch $K_n$*: $n$ vrcholový graf, v ktorom medzi každými dvomi rôznymi vrcholmi je hrana.
• *Sled*: postupnosť $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$, kde $v_i$ sú vrcholy a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.
• *Ťah*: sled v ktorom sa neopakujú hrany.
• *Cesta*: sled v ktorom sa neopakujú vrcholy (a teda ani hrany).
• *Dĺžka cesty*: počet vrcholov cesty.
• *Hamiltonovská kružnica*: uzavretá cesta obsahujúca všetky vrcholy grafu.
• *Hamiltonovská cesta*: cesta obsahujúca všetky vrcholy grafu.
• *Eulerovský ťah*: ťah obsahujúci všetky hrany grafu ("nakreslite jedným ťahom").
• *Kružnica $C_n$*: uzavretá cesta dĺžky $n$.
• *Súvislý graf*: existuje cesta medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi.
• *Komponent súvislosti*: maximálny súvislý podgraf.
• *Strom*: súvislý acyklický graf.
• *Les*: acyklický graf (komponenty súvislosti sú stromy).
• *Chromatické číslo grafu $G$*: $\chi(G)$ - najmenší počet farieb potrebných na ofarbenie vrcholov grafu $G$ tak, že žiadne dva susedné vrcholy nemajú rovnakú farbu.
• *Chromatický index grafu $G$*: najmenší počet farieb potrebných na ofarbenie hrán grafu $G$ tak, že žiadne dve hrany, ktoré sú incidentné (majúce spoločný vrchol) nemajú rovnakú farbu.
• *Chromatický polynóm grafu $G$*: $P(x, G)$ - polynóm s neznámou $x$. $P(x_0, G)$ - vyjadruje počet všetkých možných ofarbení grafu $x_0$ farbami tak, aby žiadne 2 vrcholy spojené hranou nemali rovnakú farbu. Slúži na hľadanie $\chi(G)$ - najmenšie $t \in \mathbb{N}$, pre ktoré je $P(t, G)$ rôzne od 0.
• Výpočet prebieha rekurzívne: $P(x, G) = P(x, G - \{e\}) - P(x, G \setminus \{e\})$, kde $e$ je nejaká hrana v grafe $G$, pričom $G - \{e\}$ vznikne z grafu $G$ vynechaním hrany $e$ a $G \setminus \{e\}$ vznikne z grafu $G$ kontrakciou hrany $e$ (počiatočný i koncový vrchol tejto hrany splynú do jedného).
• Chromatický polynóm pre $n$ izolovaných vrcholov, t.j. $\overline{K_n}$, je $P(x, \overline{K_n}) = x^n$.
• Pre graf $G$ s komponentami súvislosti $C_1, C_2, \ldots, C_k$ $(G = C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_k)$ je $P(x, G) = P(x, C_1) \cdot P(x, C_2) \cdot \ldots \cdot P(x, C_k)$.

[1]Version: 20091021-2235.

• Tvr: Chromatický polynóm pre strom s $n$ vrcholmi je rovný $x(x-1)^{n-1}$.
• *Bipartitný graf* $G$: graf s $\chi(G) \leq 2$

- existuje rozklad množiny vrcholov $V(G)$ na $V_1$, $V_2$ ($V_1 \cup V_2 = V(G)$ a $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) tak, že hrany majú jeden koniec vo vrcholoch z $V_1$ a druhý vo vrcholoch z $V_2$, t.j. medzi vrcholmi vo $V_1$, či $V_2$ nie je žiadna hrana.

• *Kompletný bipartitný graf* $K_{m,n}$: $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, $E = \{\{u, v\} : u \in V_1, v \in V_2\}$.
• *Nezávislá množina vrcholov*: množina vrcholov v grafe medzi ktorými nie je žiadna hrana.
• *Maximálna nezávislá množina vrcholov*: nezávislá množina maximálnej možnej kardinality.
• kardinalita maximálne množiny vrcholov: $\alpha(G)$
• *Planárne (rovinné) grafy*: grafy nakresliteľné do roviny tak, že jediný priesečník hrán je vrchol grafu
• *Mapa*: rovinné nakreslenie rovinného grafu

- charakterizovaná $S$ - počet stien, $V$- počet vrcholoch, $H$ - počet hrán, $K$ - počet komponentov súvislosti.

• *Stena*: v mape - "$n$-uholníköhraničený hranami

- n=1 - izolovaný vrchol
- n=2 - *most* (hrana, ktorej vynechaním sa zvýši počet komponentov súvislosti)
- $n \geq 3$ - $n$-uholník
- nezabudnúť započítať tzv. *vonkajšiu stenu*
- každá hrana (okrem mostov) je hranicou 2 stien

• ***Eulerova veta***: V mape je $S + V - H = K + 1$ (pre súvislé: $S + V - H = 2$)
• ***Veta***: Pre mapu platí $2V + S_1 = 2 + 2K + M + S_3 + 2S_4 + 3S_5 + 4S_6 + \ldots$, kde

$S_i$ - počet $i$-uholníkových stien ($S_1$ - izolované vrcholy),
$M$ - počet mostov,
$K$ - počet komponentov súvislosti,
$V$ - počet vrcholov.

• $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots = S_1 + M + S_3 + S_4 + \ldots$
• Bipartitný planárny graf má iba steny s párnym počtom hrán, t.j.

$$S_3 = S_5 = \ldots = 0$$

• **Dôsledky:** $K_5$ a $K_{3,3}$ nie sú planárne.

$K_5$: $V = 5$, $H = 10$, $K = 1 \Rightarrow S = 7$,
na druhej strane $6 = 2V - 2 - 2K = S_3 + 2S_4 + \ldots \geq S = 7$.
$K_{3,3}$: $V = 6$, $H = 9$, $K = 1 \Rightarrow S = 5$
na druhej strane, $K_{3,3}$ je bipartitný, $S_3 = S_5 = \ldots = 0$ a
$8 = 2V - 2 - 2K = 2S_4 + 4S_6 + \ldots \geq 2S = 10$.

• *Označené grafy* na $n$ vrcholoch: vrcholy sú očíslované

- Dva označené grafy (na $n$ vrcholoch) sa líšia, ak
$V(G_1) = V(G_2) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ & $E(G_1) \neq E(G_2)$, t.j. existuje aspoň jedna hrana, ktorá sa nachádza v jednom, a nie v druhom grafe.

• *Neoznačené grafy*: vrcholy nie sú očíslované - izomorfné grafy sa považujú za rovnaké.

• *Izomorfizmus* grafov $G_1$ a $G_2$ - ak existuje bijektívne zobrazenie $f$ z $V(G_1)$ na $V(G_2)$, ktoré zachováva susednosť, t.j. $\{v_i, v_j\} \in E(G_1) \Leftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in E(G_2)$.

• Quicksort - split (splitter) - viď Wilf strana 34

procedure split($\mathbf{x}$, $left$, $right$, $i$)

popis: rozdelí pole $[x_{left}, x_{right}]$ podľa náhodne zvolenej položky $T$ (tzv. *pivot*) tak, že hodnoty ostro menšie ako $T$ sú naľavo od indexu $i$ a hodnoty väčšie rovné ako $T$ sú napravo od indexu $i$.

výstup: $i$ - index obsahujúci položku $T$, t.j. $\mathbf{x}[i] = T$

L:= náhodný index z intervalu $\langle left, right\rangle$<br>
swap($\mathbf{x}[left]$, $\mathbf{x}[L]$)<br>
$T := \mathbf{x}[left]$<br>
$i := left$<br>
for $j := left + 1$ to $right$ do<br>
begin<br>
    if ($\mathbf{x}[j] < T$) then<br>
    begin<br>
        i:=i+1<br>
        swap($\mathbf{x}[i], \mathbf{x}[j]$)<br>
    end<br>
end<br>
swap($\mathbf{x}[left], \mathbf{x}[i]$)<br>
end{split}

## Cvičenia

• 1. Dokážte, že strom s n vrcholmi má práve n-1 hrán.

• 2. Dokážte, že súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $n - 1$ hrán.

• 3. Dokážte, že strom je bipartitný graf.

• 4. Nájdite $\chi(G)$, kde
(a) $G$ je $K_n$, (b) $G$ je $K_{m,n}$, (c) $G$ je $C_n$.

• 5. Koľko je označených grafov
(a) majúcich $n$ vrholov a $m$ hrán?
(b) na $n$ vrcholoch, kde vrcholy $\{1, 2, 3\}$ tvoria nezávislú množinu?
(c) na $n$ vrcholoch, kde vrcholy $\{1, \dots, k\}$, $k \leq n$ tvoria nezávislú množinu?

• 6a. Nech $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Uvažujme všetky označené grafy obsahujúce $n/3$ komponentov súvislosti obsahujúce $K_3$. Koľko je maximálnych nezávislých množín v tomto grafe?

• 6b. Nech $n = lk$, $l, k \in \mathbb{N}$. Uvažujme všetky označené grafy obsahujúce $n/l$ komponentov súvislosti obsahujúce $K_l$. Koľko je maximálnych nezávislých množín v tomto grafe?

• 7. Nájdite algoritmus, ktorý v čase $O(\max(n^2, mn))$ rozhodne, či graf na $n$ vrcholoch s $m$ hranami má, alebo nemá trojuholník.

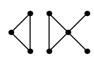
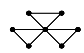
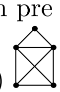
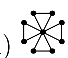
• 8. Nájdite algoritmus, ktorý rozhodne, či daný graf je bipartitný.

• 9. Nájdite graf na n vrcholoch rôzny od $K_n$, ktorého chromatické číslo je o jedna vyššie ako maximálny stupeň v grafe.

• 10. Nech $G$ je planárny graf s $S$ stenami, $H$ hranami, $V$ vrcholmi obsahujúci $k(G)$ komponentov súvislosti. Dokážte, že platí $S + V - H = k(G) + 1$.

• 11. Dokážte, že $K_5$ a $K_{3,3}$ nie sú rovinné grafy.

• 12. Určte chromaický polynóm pre nasledujúce grafy:

(a)  (b)  (c)  (d) 
(e) (b), (d) pre $n$ trojuholníkov majúcich spoločný vrchol

• 13. Simulujte procedúru *split* v algoritme *Quicksort* na nasledujúcej postupnosti $5, 2, 4, 9, 7, 6, 8, 1$, keď je pivot rovný:
(a) 4, (b) 9, (c) 6, (d) 1.

• 14. Simulujte procedúru *split* v algoritme *Quicksort* na nasledujúcej postupnosti $8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$, keď je pivot:
(a) 5, (b) 7, (c) 2, (d) 4.

• 15. Simulujte procedúru *split* v algoritme Quicksort na nasledujúcej postupnosti $8, 4, 9, 7, 1, 3, 9, 5, 4$, keď je pivot:
(a) prvá 4, (b) druhá 4, (c) prvá 9, (d) druhá 9.

• 16. Určte chromatický polynóm vzhľadom na chromatický polynóm grafu $G$ nasledujúcich grafov ($(u, v) \in E(G)$):