Problém maximálneho toku v sieti

- *sieť* - digraf (graf s orientovanými hranami) s vyznačenými vrcholmi s (zdroj, source) a t (spotrebič, ústie, sink), pričom každému šípu (u, v) (orientovanej hrane) je priradená číselná charakteristika $c(u, v) \geq 0$ tzv. *kapacita hrany* (schopnosť prepraviť nanajvýš $c(u, v)$ jednotiek v danom smere)
- *tok* - priradenie číselných hodnôt $f(u, v)$ hranám siete tak, že sú splnené nasledujúce dve podmienky (tzv. Kirkhoffove zákony):
  - $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ (po žiadnej hrane netečie viac jednotiek ako je jej kapacita)
  - pre všetky vrcholy okrem s, t platí, "čo do vrchola vchádza, aj z neho vychádza", t.j. pre vrchol v platí $\sum_u f(u, v) = \sum_w f(v, w)$
- Nech $V = W \cup \bar{W}$, $W \cap \bar{W} = \emptyset$ je rozklad množiny vrcholov siete na 2 množiny tak, že W obsahuje zdroj s a neobsahuje spotrebič t. Potom *rezom* $(W, \bar{W})$ nazveme množinu všetkých (orientovaných) hrán, ktoré majú počiatok vo W a končia vo $\bar{W}$.
- *Kapacita rezu*: súčet kapacít hrán rezu
- **Veta:** Hodnota maximálneho toku v sieti sa rovná kapacite minimálneho rezu.

Ford-Fulkersonov algoritmus na hľadanie maximálneho toku v sieti (všeobecná verzia)

- *Tok zväčšujúca cesta* - cesta po neorientovaných hranách (t.j. neberie do úvahy pôvodnú orientáciu hrán) z s do t taká, že
  - ak (u, v) je v súlade s orientáciou v sieti, tak tzv. *zvyšková kapacita hrany* $c(u, v) - f(u, v)$ je kladná t.j. ostro väčšia ako 0.
  - ak (u, v) nie je v súlade s orientáciou v sieti, tak tok po opačne orientovanej hrane je kladný, t.j. $f(v, u) > 0$

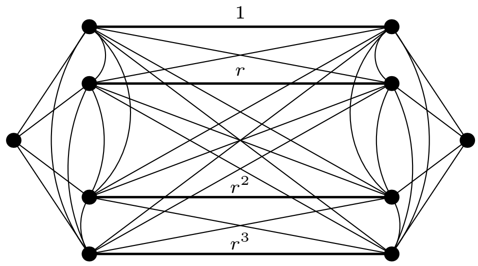
    Túto hodnotu označíme ako $d(u, v)$.
- Ak existuje tok zväčšujúca sa cesta, tak pôvodný tok možno zvýšiť o $d := \min\{d(u, v) :$ pre každú hranu(u, v) v tok zväčšujúcej ceste$\}$, tak že v súhlasne orientovaných hranách zvýšime tok o d a v nesúhlasne orientovaných ho znížime o d.

Ford-Fulkersonov algoritmus (všeobecná verzia):

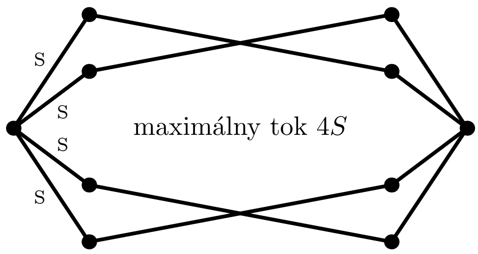
```
kým existuje tok zväčšujúca sa cesta opakuj
   - zvýš tok o príslušné d
```

Problém: V prípade reálnych kapacít má algoritmus nekonečnú zložitosť - dokonca, po nekonečne veľa krokoch algoritmus nemusí ani konvergovať k maximálnemu toku

Uvažujme nasledujúcu sieť, pričom kapacity nevyznačených hrán sú S, všetky hrany okrem (s,u), (v,t) sú obojsmerné. Zvoľme
$r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (riešenie rovnice $r^2+r-1=0$) a $S = \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

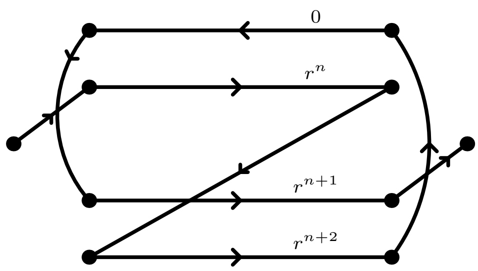


Ľahko sa vidí, že maximálny tok je $4S$ a vyzerá napr.



Keď najprv nájdeme zvyšujúcu sa cestu po hrane s kapacitou 1, tak zvyškové kapacity na "vodorovných" hranách nám zostanú $(0, r, r^2, r^3)$.

V každom kroku, na základe nasledujúcej tok zvyšujúcej cesty, dokážeme zvýšiť tok o r^{n+2}.



Preto nové zvyškové kapacity budú:

$$\begin{pmatrix} 0 + r^{n+2} \\ r^n - r^{n+2} \\ r^{n+1} - r^{n+2} \\ r^{n+2} - r^{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{n+2} \\ r^n(1-r^2) \\ r^{n+1}(1-r) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{n+2} \\ r^{n+1} \\ r^{n+3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zo symetrie siete vyplýva, že možno preusporiadať hrany tak, že zvyškové kapacity budú, ako na začiatku, v poradí $(0, r^{n+1}, r^{n+2}, r^{n+3})$.

Opakovaním predošlého postupu dostaneme tok s hodnotou

$$1 + r^3 + r^4 + \ldots = S - r - r^2 = S - 1.$$

Ford-Fulkersonov algoritmus na hľadanie maximálneho toku v sieti (scan and label)

- scan and label algoritmus - hľadá tok zväčšujúcu cestu

viď Wilf strany 65–69

- potom sa zvýši tok podľa predošlého postupu a opakuje sa scan and label, až kým nie je možné označkovať vrchol t (našli sme maximálny tok)

Algoritmus vrstvených sietí na hľadanie maximálneho toku

- k danej sieti a toku v nej sa skonštruuje vrstevná sieť
  - do 0. vrstvy sa dostane vrchol s
  - pre každý vrchol u z i-tej vrstvy sa do ďalšej vrstvy dostávajú všetky "susedné" (v neorientovanom zmysle), nezaradené a dostupné vrcholy, pričom *dostupnosť* sa definuje na základe tohto pravidla (spojenie oboch podmienok z Ford-Fulkersona do jednej): $c(u,v) - f(u,v) + f(v,u) > 0$. Zároveň sa definuje vo vrstevnej sieti orientovaná hrana (u,v), ktorej kapacita je $c(u,v) - f(u,v) + f(v,u)$.
  - toto sa opakuje pre ďalšiu vrstvu dovtedy, kým sa do nejakej vrstvy nedostane spotrebič t (vrstevná sieť; ak sa vo vrstve obsahujúcej t nachádzajú iné vrcholy, tak tie sa vo vrstevnej sieti zmažú spolu s hranami s nimi incidentnými), prípadne nemožno už zaradiť žiadny ďalší vrchol do vrstevnej siete (maximálny tok).
- hľadáme tok vo vrstevnej sieti, ktorý nasycuje aspoň jednu hranu z každej existujúcej cesty medzi s a t:
  - vo vrstevnej sieti sa vypočítajú *potenciály* vrcholov (okrem s, t) (t.j. minimum z hodnôt kapacít čo vchádzajú do vrchola a vychádzajú z vrchola)
  - vynechajú sa všetky vrcholy s nulovým potenciálom (i všetky hrany s nimi incidentné), prehodnotia sa potenciály (pokiaľ vzniknú ďalšie vrcholy s nulovým potenciálom, tak sa vynechajú aj tie a celé sa to opakuje, až kým každý z vrcholov (okrem s, t) má nenulový potenciál.
  - Nájde sa vrchol s minimálnym potenciálom $p > 0$ - dokážeme nájsť zvýšenie toku o p jednotiek
    - Postupujeme najprv z daného vrchola smerom k t, t.j. do vyšších vrstiev. Potenciál toho vrcholu rozdelíme na hrany vychádzajúce

z tohto vrchola - zoradíme si ich do istého poradia a v tomto poradí ich postupne nasycujeme, ak sa dá, čiže napr. pri potenciáli 100 a kapacitami hrán v poradí (20, 20, 90) prepravíme (20, 20, 60), pri inom poradí hrán (90, 20, 20) zase (90, 10, 0). Toto opakuje pre každý vrchol v nasledujúcej vrstve (do ktorého sme prepravili nejaký tok), až kým sa nedostaneme k t.

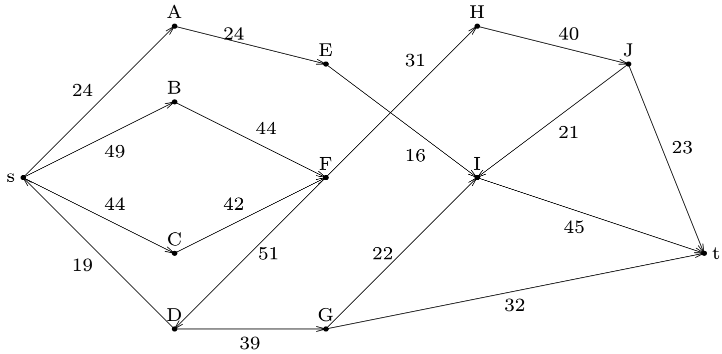
    * Postupuje smerom k s, t.j. k nižším vrstvám. Potenciál rozdeľujeme medzi hrany vchádzajúce do tohto vrchola takým istým spôsobom, ako v predošlom prípade. Toto opakujeme pre všetky vrcholy z nižších vrstiev (z ktorých sme prepravili nejaký tok), až kým sa nedostaneme k s.

  - Zvýšime tok v pôvodnej sieti o p jednotiek
    * ku každej hrane (u, v) predošlého p jednotkového toku vo vrstevnej sieti nájdeme zodpovedajúcu hranu v pôvodnej sieti a zvýšime tok po (u, v) o $\min\{p, c(u, v) - f(u, v)\}$. V prípade, že sme neminuli celý potenciál p, t.j. $p - (c(u, v) - f(u, v)) > 0$, tak o tento zvyšok znížime tok na hrane (v, u).
  - vo vrstevnej sieti vynecháme tento vrchol a hrany s ním incidentné, upravíme zvyškové kapacity na zostávajúcich hranách a opakujeme tento postup, pokým ešte existuje cesta medzi s, t (ak už neexistuje cesta medzi s a t, tak sme našli tok, ktorý nasycuje aspoň jednu hranu z každej cesty medzi s a t vo vrstevnej sieti)

- opakujeme konštrukciu vrstevnej siete a ďalšie kroky pre nový tok v pôvodnej sieti. Pokiaľ je konštruovanie vrstevnej siete ukončené (t.j. neexistujú ďalšie dostupné nezaradené vrcholy) a t sa nedostal do žiadnej vrstvy, tak sme našli maximálny tok.

Riešené príklady

- Nájdite maximálny tok v nasledujúcej sieti pomocou
  (a) Ford-Fulkersonovho algoritmu
  (b) metódy vrstvených sietí



Ford-Fulkersonov algoritmus

Začneme označkovaním vrchola s - dostane značku $[-\infty, -, \infty]$.

Kým existuje označkovaný a nepreskúmaný vrchol, tak opakuj

preskúmaj tento vrchol

Preskúmanie vrchola u pozostáva z nasledujúcich krokov:

každý neoznačkovaný sused v, dostane značku, pričom sused je vrchol, ktorý je spojený hranou (akéjkoľvek orientácie) a v prípade správnej orientácie je zvyšková kapacita hrany, $c(u,v) - f(u,v)$, kladná, v prípade opačnej orientácie je tok $f(v,u)$ kladný. Značka tohto suseda je v prípade pozitívnej orientácie rovná $[u, +, \min\{z(u), c(u,v) - f(u,v)\}]$ a v prípade opačnej orientácie $[u, -, \min\{f(v,u), z(u)\}]$, kde $z(u)$ je tretia hodnota v značke vrchola u.

V našom prípade začíname s nulovým tokom.

Preskúmanie vrchola s:

A dostane značku $[s, +, \min\{\infty, 24\}] = [s, +, 24]$.

B dostane značku $[s, +, 49]$.

C dostane značku $[s, +, 44]$.

D nie je susedom, keďže ideme po opačne orientovanej hrane, na ktorej je nulový tok.

Zakrúžkujeme s, čo značí úplné preskúmanie vrchola.

Vyberieme si ďalší označkovaný, nepreskúmaný vrchol (ak existuje). V našom prípade sú to vrcholy A, B, C.

Vyberme napr. vrchol B.

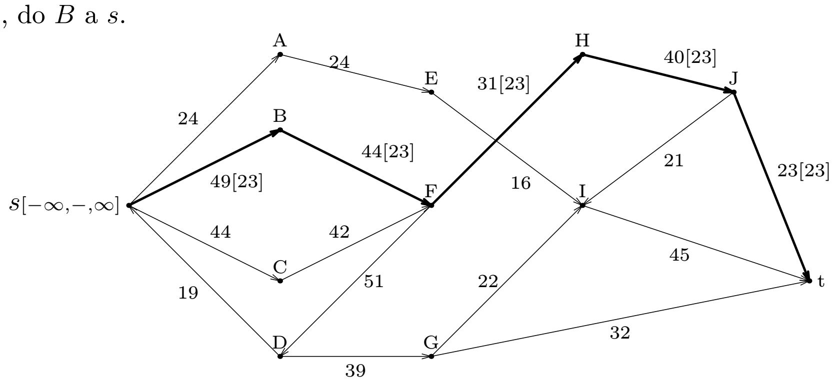
Preskúmanie vrchola B: jediný potenciálny (i skutočný) sused je vrchol F, ten dostane značku $[B, +, \min\{49, 44\}] = [B, +, 44]$. Zakrúžkujeme vrchol B.

Vyberme ďalej C: jediný potenciálny sused je F, ale ten už má značku, preto len zakrúžkujeme C.

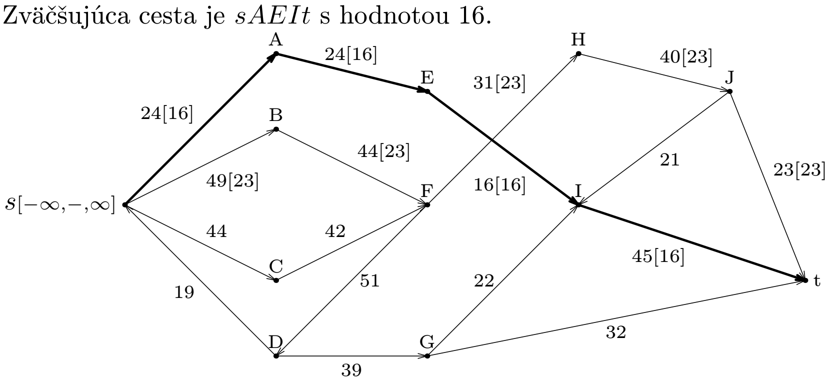
Výberom vrchola F dostaneme, že jeho susedia sú $H[F, +, 31]$ a $D[F, +, 44]$. F zakrúžkujeme.

Voľbou H sa dostaneme k $J[H, +, 31]$, H zakrúžkujeme.

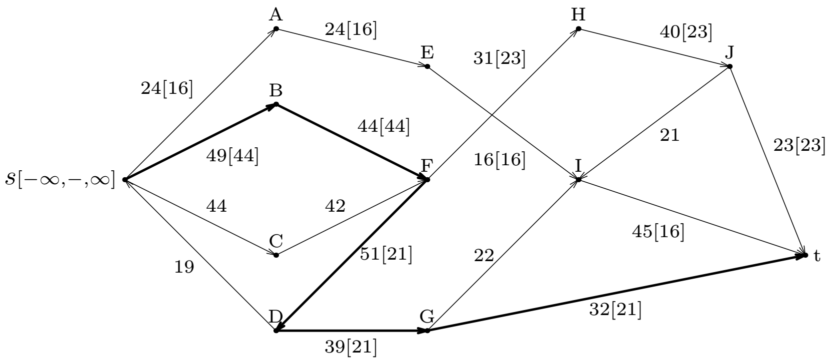
Voľbou J sa dostaneme k $I[J, +, 21]$ a $t[J, +, 23]$, J zakrúžkujeme. Akonáhle dospejeme k vrcholu t, tak proces značkovania a preskúmavanie vrcholov končí, našli sme tok zväčšujúcu cestu s hodnotou $h = 23$. Ideme spätne od vrchola t. Podľa značky za presúvame do vrchola t, pričom $(+)$ pripočítavame k toku na hrane Jt hodnotu h. Potom ideme do H (podľa značky J), potom do F (značka H), do B a s.



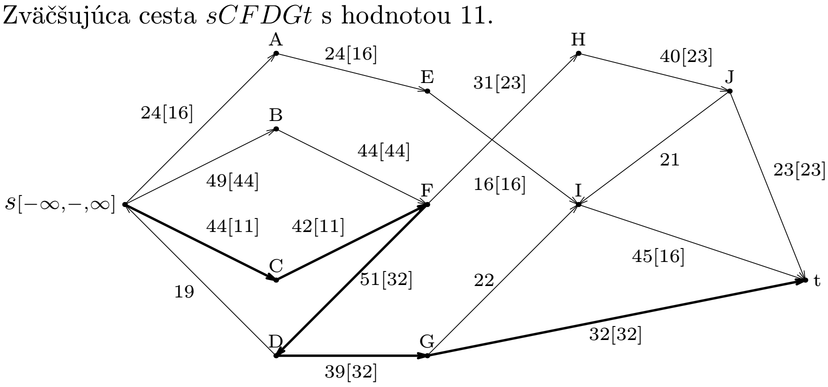
Druhé opakovanie algoritmu prinesie nasledovné značky:
$s[-\infty, -, \infty]$
$A[s, +, 24]$, $B[s, +, 26]$, $C[s, +, 44]$
A: $E[A, +, 24]$
E: $I[E, +, 16]$
I: $t[I, +, 16]$
Zväčšujúca cesta je $sAEIt$ s hodnotou 16.



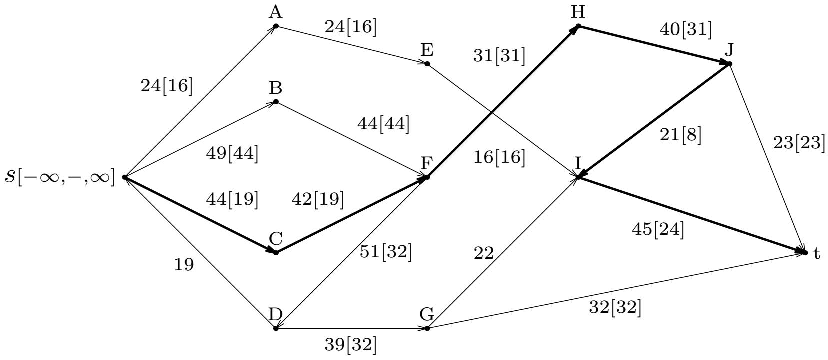
Ďalšie opakovanie algoritmu:
$s[-\infty, -, \infty]$: $A[s, +, 8]$, $B[s, +, 26]$, $C[s, +, 44]$
A: $E[A, +, 8]$
E: nemá susedov
B: $F[B, +, 21]$
C: nemá susedov (neoznačkovaných)
F: $H[F, +, 8]$, $D[F, +, 21]$
D: $G[D, +, 21]$
G: $I[G, +, 21]$, $t[G, +, 21]$.
Máme zväčšujúcu sa cestu $sBFDGt$ s hodnotou 21.



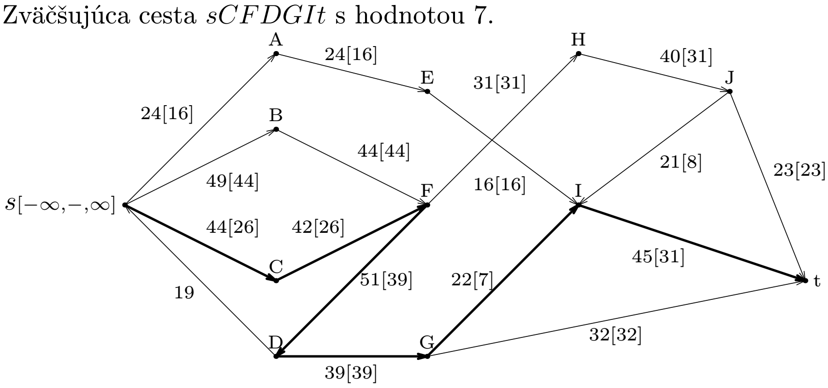
$s[-\infty,-,\infty]$: $A[s,+,8]$, $B[s,+,5]$, $C[s,+,44]$
C: $F[C,+,42]$
F: $H[F,+,8]$, $D[F,+,30]$
D: $G[D,+,18]$
G: $I[G,+,18]$, $t[G,+,11]$.
Zväčšujúca cesta $sCFDGt$ s hodnotou 11.



$s[-\infty,-,\infty]$: $A[s,+,8]$, $B[s,+,5]$, $C[s,+,33]$
A: $E[A,+,8]$
E: nemá susedov
B: nemá susedov
C: $F[C,+,31]$
F: $H[F,+,8]$, $D[F,+,19]$
H: $J[H,+,8]$
J: $I[J,+,8]$
I: $t[I,+,8]$, $G[I,+,8]$
Zväčšujúca cesta $sCFHJIt$ s hodnotou 8.



$s[-\infty,-,\infty]$: $A[s,+,8]$, $B[s,+,5]$, $C[s,+,25]$
A: $E[A,+,8]$
E: nemá susedov
B: nemá susedov
C: $F[C,+,23]$
F: $D[F,+,19]$
D: $G[D,+,7]$
G: $I[G,+,7]$
I: $J[I,-,7]$, $t[I,+,7]$
Zväčšujúca cesta $sCFDGIt$ s hodnotou 7.



$s[-\infty,-,\infty]$: $A[s,+,8]$, $B[s,+,5]$, $C[s,+,18]$
A: $E[A,+,8]$
E: nemá susedov
B: nemá susedov
C: $F[C,+,16]$
F: $D[F,+,12]$
D: nemá susedov

Neexistujú ďalšie označkované a nepreskúmané vrcholy a t nedostalo značku, preto sme našli maximálny tok, ktorého hodnota je (pre s) 16+44+26 = 86 = 23+31+32 (pre t).

Metóda vrstvených sietí

• ***Vrstevná sieť pre nulový tok:***

V 1. vrstve je samotné s.

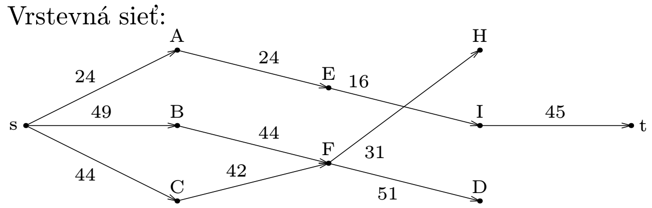
Jeho susedia sú: A, B, C, D. Hodnota $c(u, v) - f(u, v) + f(v, u)$ je kladná pre sA, sB, sC, preto do ďalšej vrstvy sa dostanú vrcholy A, B, C, hrany sA - 24, sB - 49, sC - 44.

Susedia (nezaradení) vrcholov A, B, C sú E. F. Hrany AE - 24, BF - 44, CF - 42.

Susedia E, F sú D, H, I. Hrany EI - 16, FH - 31, FD - 51

Susedia D, H, I sú G, J, t. Preto sa do ďalšej vrstvy dostane len t.

Vrstevná sieť:



• Hľadanie toku nasycujúceho aspoň jednu hranu každej cesty medzi s a t:

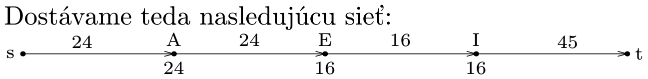
Určíme potenciály vnútorných vrcholov vo vrstevnej sieti, t.j. vrcholov rôznych od s a t.

A - 24, B - 44, C - 42, E - 16, F - 82, H - 0, I - 16, D - 0

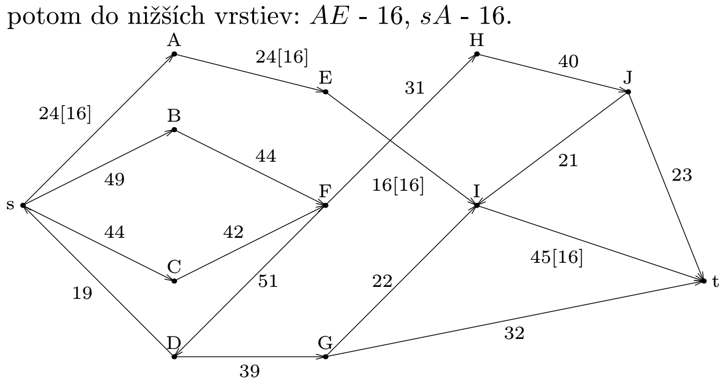
Vynecháme vrcholy s nulovými potenciálmi spolu s hranami s nimi incidentnými, t.j. vrcholy H, D, hrany FH, FD a prehodnotíme potenciály. Toto opakujeme, až kým nemáme vrcholy s nulovými potenciálmi.

Vynecháme F a hrany BF, CF, tým pádom sa zmení potenciál B, C na nulu, preto ich vynecháme (spolu s hranami sB, sC).

Dostávame teda nasledujúcu sieť:



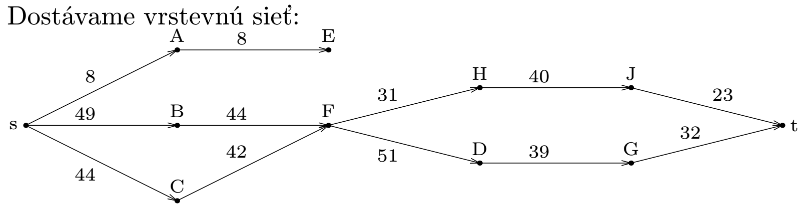
Vyberieme vrchol s najmenším potenciálom (E alebo I) E a pretláčame hodnotu 16 v pôvodnej sieti. Najprv do vyšších vrstiev, EI bude tok 16, It to 16, potom do nižších vrstiev: AE - 16, sA - 16.



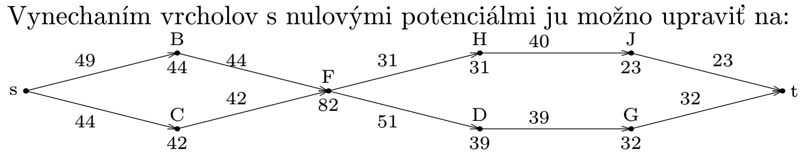
Vynecháme vo vrstevnej sieti vrchol E spolu s hranami s ním incidentými, AE a EI, upravíme podľa pôvodnej siete kapacity zostávajúcich hrán vo vrstvenej sieti (sA i It bude mať o 16 jednotiek menej), prehodnocujeme potenciály, až kým nemáme vrchol s nulovým potenciálom, alebo nám zostanú izolované vrcholy s, t, t.j. neexistuje medzi nimi cesta. Potenciál A, I sa mení na 0, preto ich vynechávame i s hranami sA, It. Zostanú nám vrcholy s a t bez priameho spojenia cestou. Týmto sme našli tok nasycujúci aspoň jednu hranu každej cesty medzi s a t vo vrstvenej sieti.

Pre nový tok opakujeme predošlý postup.

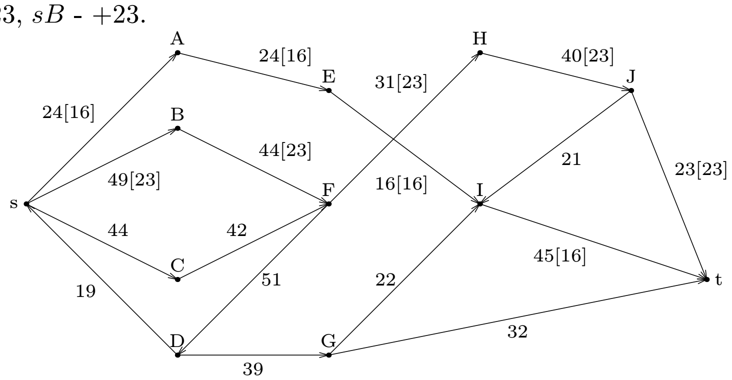
Dostávame vrstevnú sieť:



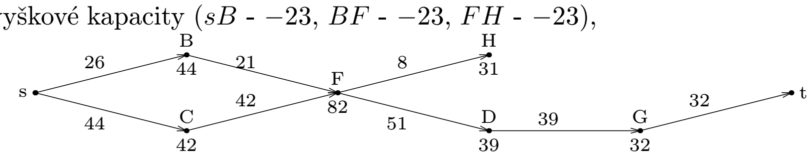
Vynechaním vrcholov s nulovými potenciálmi ju možno upraviť na:



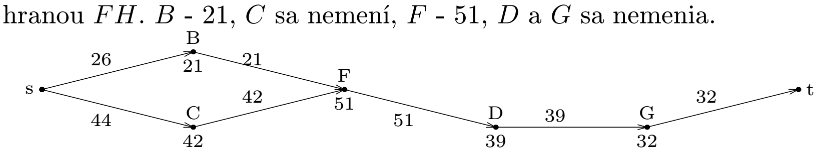
Vrchol s najmenším potenciálom je J. Z neho v pôvodnej sieti pretláčame 23 jednotiek. Jt - $+23$, JH - $+23$, FH - $+23$. Z vrchola F vo vrstvenej sieti možno postupovať viacerými spôsobmi - vyberieme si jednu z možností (zvolíme si poradie hrán a v tomto poradí ich nasycujeme, pokiaľ môžeme), napr. BF - $+23$, sB - $+23$.



Vo VS vynecháme tento vrchol i hrany s ním incidentné (HJ, Jt), upravíme zvyškové kapacity (sB - -23, BF - -23, FH - -23),

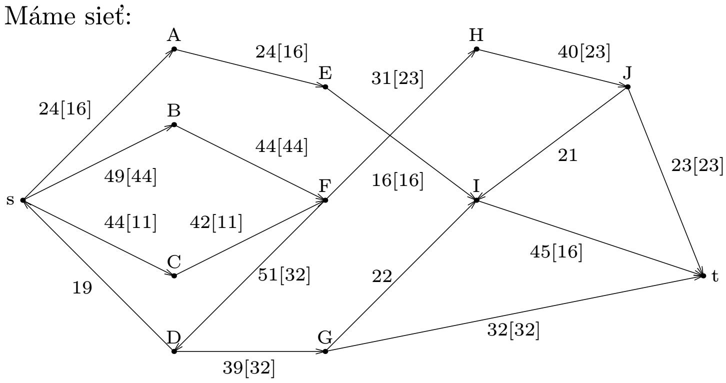


a prehodnocujeme potenciály. H má nulový potenciál, preto sa vynecháva i s hranou FH. B - 21, C sa nemení, F - 51, D a G sa nemenia.



Vyberieme vrchol s najnižším potenciálom - G a v PS pretláčame 32 jednotiek. Gt - +32, DG - +32, FD - +32, vyberieme poradie BF, CF a na BF použijeme všetký možný 21 jednotiek a zvyšné (11) použijeme na CF. sB - +21 a sC - +11.

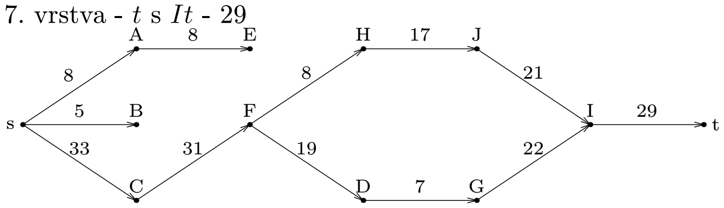
Máme sieť:



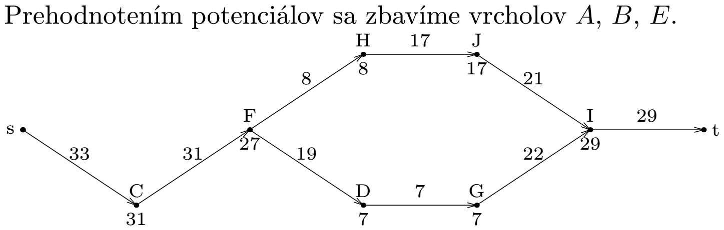
Vo VS vynecháme vrchol G i s hranami DG, Gt a prehodnocovaním potenciálov (najprv sa vynechá D i s FD, potom F s BF, CF a nakoniec i B, C s sB, sC) dospejeme k tomu, že sme sa dostali k toku nasycujúcemu cesty medzi s a t.

Pre nový tok opakujeme postup:

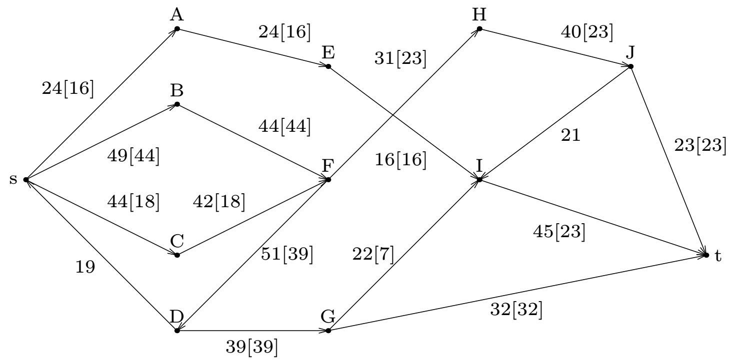
1. vrstva - s.
2. vrstva - A, B, C s sA - 8, sB - 5, sC - 33.
3. vrstva - E, F s AE - 8, CF - 31
4. vrstva - D, H s FH - 8, FD - 19
5. vrstva - G, J s DG - 7, HJ - 17
6. vrstva - I s GI - 22, JI - 21
7. vrstva - t s It - 29



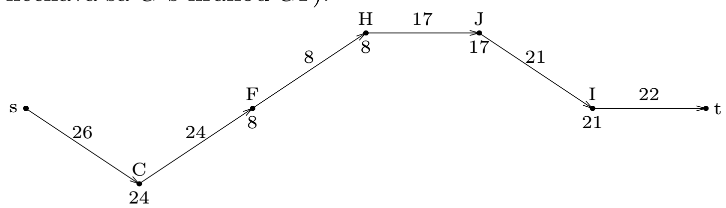
Prehodnotením potenciálov sa zbavíme vrcholov A, B, E.



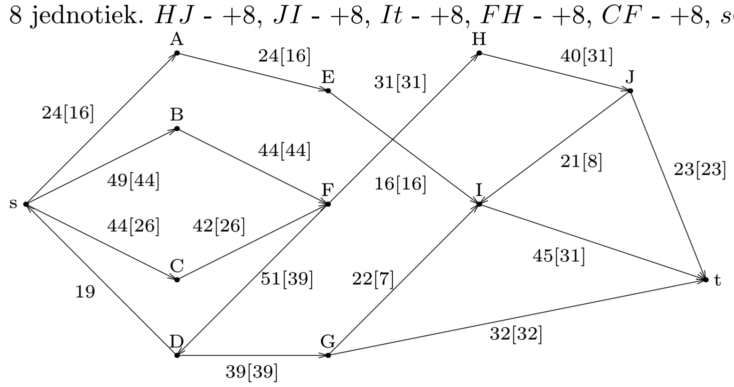
Vyberieme vrchol s najnižším potenciálom (D alebo G), D, a pretláčame v pôvodnej sieti 7 jednotiek. DG - +7, GI - +7, It - +7, FD - +7, CF - +7 a sC - +7.



Vo VS vynecháme D s FD, DG, upravíme zvyškové kapacity podľa pôvodnej siete (sC - -7, CF - -7, GI - -7, It - -7) a prehodnocujeme potenciály (vynecháva sa G s hranou GI).



Nájdeme vrchol s najmenším potenciálom (F alebo H), H, a pretláčame v PS 8 jednotiek. HJ - $+8$, JI - $+8$, It - $+8$, FH - $+8$, CF - $+8$, sC - $+8$.

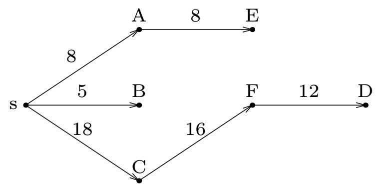


Vo VS vynecháme vrchol H s HJ, FH, upravíme zvyškové kapacity na zostávajúcich hranách (sC - -8, CF - -8, JI - -8, It - -8) a prehodnotíme potenciály (dôjde k vynechaniu všetkých vnútorných vrcholov). Teda opäť sme našli tok nasycujúci ....

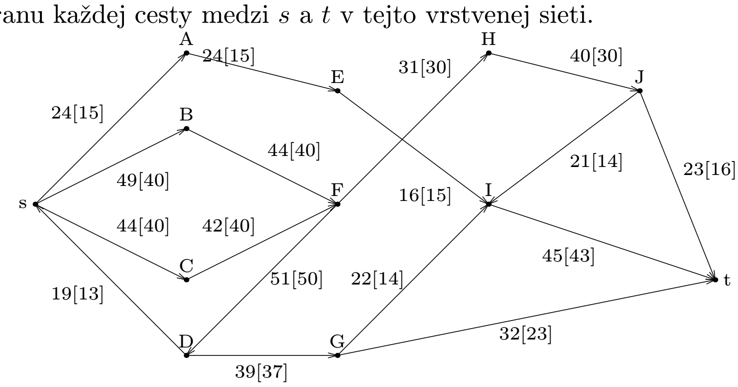
Opakujeme postup pre novozískaný tok v PS.

1. vrstva: s; 2. vrstva: A, B, C s sA - 8, sB - 5, sC - 18; 3. vrstva: E, F s CF - 16; 4. vrstva: D s FD - 12

D nemá ďalších susedov, čím sa ukončila konštrukcia VS a t sa nedostal do žiadnej vrstvy. Máme maximálny tok s hodnotou 86.



• Nájdite vrstevnú sieť k zadanej sieti a nájdite tok nasycujúci aspoň jednu hranu každej cesty medzi s a t v tejto vrstvenej sieti.

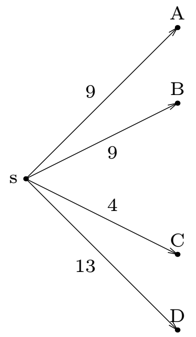


Do 1. vrstvy sa dostane vrchol s.

Jeho susedia spojení hranou ľubovoľnej orientácie sú: A, B, C, D.

Jeho susedia, ktorí majú nenulovú hodnotu $c(u, v) - f(u, v) + f(v, u)$ sú: A - 9, B - 9, C - 4, D - 13.

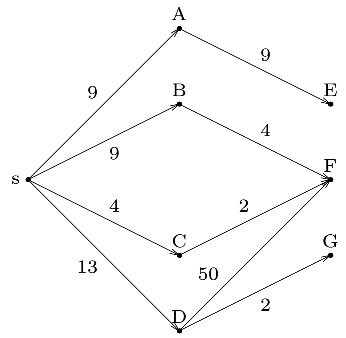
Preto sa do 2. vrstvy dostanú vrcholy A, B, C, D.



Susedia vrcholov A, B, C, D sú: E, F, G.

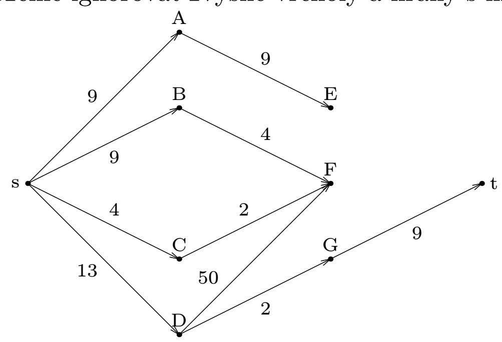
Nenulovú hodnotu majú: E, F, G, pričom AE - 9, BF - 4, CF - 2, $FD - 50$, $DG - 2$

Preto sa do druhej vrstvy dostanú všetky E, F, G.



Susedia vrcholov E, F, G sú H, I, t.

Nenulovú hodnotu majú H, I, t, do ďalšej vrstvy sa dostane vrchol t, a tak môžeme ignorovať zvyšné vrcholy a hrany s nimi incidentné. (Gt - 9)



Keďže sa t dostalo do jednej z vrstiev, tak sme ukončili konštrukciu vrstvenej siete.

• ***Hľadanie toku, ktorý nasycuje aspoň jednu hranu každej z ciest medzi s a t.***

Pozeráme sa na potenciály jednotlivých vrcholov:

A - 9, B - 4, C - 2, D - 13, E - 0, F - 0, G - 2.

E, F majú nulové potenciály (nič z nich nevychádza), preto ich možno vynechať aj s hranami s nimi incidentnými: AE, BF, CF, DF. Týmto sa zmenia potenciály vrcholov A - 0,B−0, C - 0, D - 2, preto vynecháme i vrcholy A, B, C a hrany sA, sB, sC.

Zostane:

Vyberieme si vrchol s najnižším potenciálom: D alebo G. Napr. D. A pretlačíme tieto 2 jednotky do vyšších i nižších vrstiev. Tok bude 2 na hranách sD, DG, Gt. V pôvodnej sieti teda zvýšime tok na sD (15), DG (39) a Gt (25).

Vynecháme D a hrany s ním incidentné a aktualizujeme zvyškové kapacity na zostávajúcich hranách.

Spočítame potenciály vnútorných vrcholov, čím zistíme, že G má nulový potenciál, preto ho vynecháme (aj hrany s ním incidentné). Ostanú nám samotné dva vrcholy s a t, čím sme ukončili hľadanie toku, ktorý nasycuje aspoň jednu hranu každej cesty medzi s a t.

Pri hľadaní maximálneho toku, opakujeme predošlý postup, t.j. nanovo konštruujeme vrstevnú sieť (až kým, sa raz nedostane t do žiadnej vrstvy).