Prehľad metód integrovania zo skrípt "skripta2.pdf":

Základné metódy výpočtu integrálov:

Tabuľkové integrály:

Substitučná metóda:

Metóda per partes:

Racionálne funkcie: $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Rozklad na parciálne zlomky:

1. $\mathrm{st}(P(x)) < \mathrm{st}(Q(x)$, ak nie, tak vydelíme so zvyškom polynóm $P(x)$ polynómom $Q(x)$, t.j.
$$P(x) = P_1(x)Q(x) + Zv(x), \text{ pričom } \mathrm{st}(Zv(x)) < \mathrm{st}(Q(x))$$
2. Rozložíme $Q(x)$ na súčin koreňových činiteľov, t.j. na tvar:
$$Q(x) = c(x-a_1)^{e_1}(x-a_2)^{e_2}\dots(x-a_n)^{e_n}(x^2+c_1x+d_1)^{f_1}\dots(x^2+c_mx+d_m)^{f_m}$$
3. Hľadáme koeficienty pre parciálne zlomky:

pre $(x-a)^n$: $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$

pre $(x^2+ax+b)^m$: $\frac{B_1x+C_1}{x^2+ax+b} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+ax+b)^2} + \dots \frac{B_mx+C_m}{(x^2+ax+b)^m}$

$\frac{Zv(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \dots + \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)} + \dots$, upravíme na spoločného menovateľa a porovná me zodpovedajúce výrazy pri mocninách x-ka, čím dostaneme sústavu rovníc pre hľadané koeficienty.

Pomôcka pri zostavovaní sústavy: Po vynasobení menovateľom dostaneme: $Zv(x) = U(x)$, pričom $U(x)$ obsahuje neznáme koeficienty a mocniny x-ka. Dosadením hodnoty a dostaneme koeficient pri $(x-a)^n$, kde n je maximálna mocnina, s ktorou sa $(x-a)$ nachádza v $Q(x)$, t.j. $Zv(a) = A_n \cdot h$, h je číslo.

Teda ak $Q(x)$ je zložený zo súčinu $(x-a)(x-b)\dots$ len v prvej mocnine, tak vobec nie je potrebné riešiť sústavu, stačí dosádzať postupne hodnoty a, b, ..., čím dostaneme príslušné koeficienty.

4. *integrujeme základné typy:*

$\frac{A}{x-a}$, $t = x-a$

$\frac{A}{(x-a)^m}$, $m > 1$, $t = x-a$

$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b} = \frac{\frac{A}{2}(2x+a)+B-\frac{Aa}{2}}{x^2+ax+b} = \frac{A}{2}\frac{(x^2+ax+b)'}{x^2+ax+b} + (B-\frac{Aa}{2})\frac{1}{x^2+ax+b}$

$\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^m}$, $m>1$, $\dots = \frac{\frac{A}{2}(2x+a)+B-\frac{Aa}{2}}{(x^2+ax+b)^m} = \frac{A}{2}\frac{(x^2+ax+b)'}{(x^2+ax+b)^m} + (B-\frac{Aa}{2})\frac{1}{(x^2+ax+b)^m}$

$\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x-\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}}$, $t = \frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}} \left(= \frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} \right)$

$\frac{1}{(x^2+ax+b)^m}$ *- per partes pre* $\frac{1}{(x^2+ax+b)^{m-1}}$ *s* $u = \frac{1}{(x^2+ax+b)^{m-1}}$ *a* $v' = 1$, *dostaneme rekurentný vzorec: $I_m = f(I_{m-1})$ a postupným znižovaním m sa dostaneme k m=1, čo vyriešime predošlou metódou.*

Iracionálne funkcie: *(výrazy s odmocninami)*

$R\left(\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, $R\left(\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$,..., $R\left(\sqrt[n_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, *$n$ je najmenší spoločný násobok hodnôt $n_1, n_2, \dots n_m$*

$R(\sqrt{ax^2+bx+c})$*:*

Doplnenie na štvorec: $ax^2+bx+c = a \cdot \left(\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)$

a vhodná substitúcia upraví výraz na jeden z týchto tvarov:

$R(\sqrt{u^2-x^2})$*:*

$x = u\sin t$, $\mathrm{d}x = u\cos t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{u^2-x^2} = |u|\cos t$, *resp.*

$x = u\cos t$, $\mathrm{d}x = -u\sin t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{u^2-x^2} = |u|\sin t$

$R(\sqrt{u^2+x^2})$

$x = u\,\mathrm{tg}\,t$, $\mathrm{d}x = \frac{u}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = u(1+\mathrm{tg}^2\,t)\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{u^2+x^2} = \frac{|u|}{\cos t}$, *resp.*

$x = u\,\mathrm{cotg}\,t$, $\mathrm{d}x = -\frac{u}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = -u(1+\mathrm{cotg}^2\,t)\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{u^2+x^2} = \frac{|u|}{\sin t}$

$R(\sqrt{x^2-u^2})$

$x = \frac{u}{\sin t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{u\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2-u^2} = |u|\,\mathrm{tg}\,t$, *resp.*

$x = \frac{u}{\cos t}$, $\mathrm{d}x = \frac{u\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2-u^2} = |u|\,\mathrm{cotg}\,t$

Trigoniometrické funkcie: *(*$\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$*):*
Univerzálna substitúcia, pre $R(\sin, \cos)$*:* $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$\int \sin^n x \cos^m x\,\mathrm{d}x,\ n, m \in Z$ *(celé čísla)*
1. metóda: Aspoň jedno z n*,* m *je nepárne:*

n *nepárne:* $t = \cos x$
m *nepárne;* $t = \sin x$
- t.j. dáva sa tam tá druhá funkcia
- Ak obe nepárne tak si možno vybrať.

2. metóda: ak n *a* m *sú buď obe párne alebo obe nepárne*

$t = \mathrm{tg}\,x$.
- Oproti 1. metóde(prípad nep-nep) sa väčšinou dostanú jednoduchšie racionálne funkcie, ktoré treba v ďalšom integrovať.

$\int \sin nx \cos mx$*: (Vychádza zo vzorca* $\sin(nx \pm mx) = \ldots$*)*

$\sin(nx + mx) = \sin nx \cos mx + \cos nx \sin nx$
$\sin(nx - mx) = \sin nx \cos mx - \cos nx \sin mx$
$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}\big(\sin(nx + mx) + \sin(nx - mx)\big)$

$\int \sin nx \sin mx$*:*
$\int \cos nx \cos mx$*: (Vychádzajú zo vzorca* $\cos(nx \pm mx) = \ldots$*)*

$\cos(nx + mx) = \cos nx \cos mx - \sin nx \sin mx$
$\cos(nx - mx) = \cos nx \cos mx + \sin nx \sin mx$
$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}\big(\cos(nx - mx) - \sin(nx - mx)\big)$
$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}\big(\cos(nx + mx) + \cos(nx - mx)\big)$

Transcendentálne funkcie: $P(e^x), P(\ln x), ...$

Substitučná metóda:
Metóda per partes: