Náznaky riešení:

Pozn: 1. Pri hľadaní partikulárneho riešenia v úlohách stačí nájsť jedno z nich. Teda pri určovaní neurčitého integrálu sa nemusí uviesť obligátne $+C$.

Pozn: 2. Odstraňovanie absolútnych hodnôt popísané v riešeniach sa prevádza obmedzením sa na vhodné intervaly. V niektorých náznakoch riešenia sa rovno uvádzajú tvary bez absolútnych hodnôt, t.j. predpokladá sa, že tie boli už odstránené.

1. $10^x - 10^{-y}y' = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $10^{-y}y' = 10^x$, t.j. $10^{-y}\,\mathrm{d}y = 10^x\,\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $-\frac{1}{\ln 10}10^{-y} = \frac{1}{\ln 10}10^x + C$

Vyjadrenie y: $10^{-y} = C - 10^x$, $-y = \log_{10}(C - 10^x)$

Riešenie rovnice: $y = -\log_{10}(C - 10^x) = \log_{10}\frac{1}{C-10^x}$

Skúška správnosti: $10^x - 10^{-y}y' = 10^x - (C - 10^x)\cdot(\frac{1}{\ln 10})\frac{-1}{C-10^x}\cdot(-10^x)\ln 10 = 10^x - 10^x = 0$

$$\boxed{y = \log_{10}\frac{1}{C-10^x}}$$

2. $1 - 2x - y^2y' = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $y^2y' = 1 - 2x$, t.j. $y^2\,\mathrm{d}y = (1 - 2x)\,\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\frac{1}{3}y^3 = x - x^2 + C$

Vyjadrenie y: $y^3 = 3x - 3x^2 + C$, $y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}$

Skúška správnosti: $1 - 2x - y^2y' = 1 - 2x - \sqrt[3]{(3x - 3x^2 + C)^2}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-3x^2+C)^2}}\cdot(3 - 6x) =$

$= (1 - 2x) - (1 - 2x) = 0$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}}$$

3. $\frac{1}{x^2} + \frac{y'}{1+y^2} = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{1+y^2} = -\frac{1}{x^2}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\operatorname{arctg} y = \int -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x} + C$

Vyjadrenie y: $y = \operatorname{tg}(C + \frac{1}{x})$

Skúška správnosti: $\frac{1}{x^2} + \frac{y'}{1+y'} = \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{\cos^2(C+\frac{1}{x})}\cdot\frac{-1}{x^2}}{1+\operatorname{tg}^2(C+\frac{1}{x})} = \frac{1}{x^2} - \frac{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos^2(C+\frac{1}{x})}}{1+\frac{\sin^2(C+\frac{1}{x})}{\cos^2(C+\frac{1}{x})}} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\frac{1}{\cos^2(C+\frac{1}{x})}}{\frac{\sin^2(C+\frac{1}{x})+\cos^2(C+\frac{1}{x})}{\cos^2(C+\frac{1}{x})}} =$

$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\frac{1}{\cos^2(C+\frac{1}{x})}}{\frac{1}{\cos^2(C+\frac{1}{x})}} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$

$$\boxed{y = \operatorname{tg}(C + \tfrac{1}{x})}$$

4. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}} = 0$, $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Rovnica so separovanými premennými: $-\frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, t.j. $-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\int -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{c} t = 1 - y^2 \\ \mathrm{d}t = -2y\,\mathrm{d}y \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} = \sqrt{1 - y^2} = \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1 - x^2} + C$

Vyjadrenie y: $\sqrt{1 - y^2} = C - \sqrt{1 - x^2}$,($C \geq 1$, inak by $\sqrt{\ }$ bola záporná), $1 - y^2 = (C - \sqrt{1 - x^2})^2 = C^2 + 1 - x^2 - 2C\sqrt{1 - x^2}$, $y^2 = x^2 - C^2 + 2C\sqrt{1 - x^2}$, $y = \pm\sqrt{x^2 - C^2 + 2C\sqrt{1 - x^2}}$,

Dosadenie okrajových podmienok: $y(0) = \pm\sqrt{2C - C^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, t.j. $2C - C^2 = \frac{3}{4}$ a $C^2 - 2C + \frac{3}{4} = 0$ a $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{3}{2}$. Podmienka $C \geq 1$ určuje jednoznačne riešenie.

Alebo $\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = C - 1$, t.j. $C = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - x^2} = \frac{3}{2},\ \text{resp. } y = \sqrt{x^2 + 3\sqrt{1 - x^2} - \frac{9}{4}}}$$

5. $1 + y^2 + xyy' = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{yy'}{1+y^2} = -\frac{1}{x}$, t.j. $\frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $-\ln x + C = \int \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{matrix} t = 1+y^2 \\ \mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}y \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$

Vyjadrenie y: $\ln(1+y^2) = C - 2\ln x$, $1+y^2 = Ke^{-2\ln x} = \frac{K}{x^2}$

Riešenie rovnice: $y = \pm\sqrt{\frac{K}{x^2-1}} = \pm\sqrt{\frac{K-x^2}{x^2}}$

Skúška správnosti: $1+y^2+xyy' = 1 + \frac{K-x^2}{x^2} + x \cdot \pm\sqrt{\frac{K-x^2}{x^2}} \cdot \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K-x^2}} \cdot \frac{-2x(x^2)-(K-x^2)2x}{x^4} =$
$= 1 + \frac{K}{x^2} - 1 + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2Kx}{x^4} = \frac{K}{x^2} - \frac{K}{x^2} = 0$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{K-x^2}{x^2}}}$$

6. $-1 + e^{-y}(1+y') = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $-1 + e^{-y} + e^{-y}y' = 0$, $e^{-y}y' = 1 - e^{-y}$, $-\frac{e^{-y}}{e^{-y}-1}y' = 1$, t.j. $-\frac{e^{-y}}{e^{-y}-1}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $x + C = \int -\frac{e^{-y}}{e^{-y}-1}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{matrix} t = e^{-y}-1 \\ \mathrm{d}t = -e^{-y}\,\mathrm{d}y \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t = \ln(e^{-y} - 1)$

Vyjadrenie y: $Ke^x = e^{-y} - 1$, $-y = \ln(1+Ke^x)$

Riešenie rovnice: $y = -\ln(1+Ke^x) = \ln\frac{1}{1+Ke^x}$

Skúška správnosti: $-1+e^{-y}(1+y') = -1+(1+Ke^x)\cdot(1-\frac{1}{1+Ke^x}\cdot Ke^x) = -1+(1+Ke^x)\cdot\frac{1+Ke^x-Ke^x}{1+Ke^x} = -1+1 = 0$

$$\boxed{y = \ln\frac{1}{1+Ke^x}}$$

7. $e^{x+y} - y' = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $y'e^{-y} = e^x$, t.j. $e^y\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $-e^{-y} = e^x + C$, $e^{-y} = -e^x + C$, $-y = \ln(C - e^x)$,

Riešenie rovnice: $y = -\ln(C - e^x) = \ln\frac{1}{C-e^x}$

Skúška správnosti: $e^{x+y} - y' = e^x \cdot e^y - (-1)\frac{1}{C-e^x}\cdot(-e^x) = \frac{e^x}{C-e^x} - \frac{e^x}{C-e^x} = 0$

$$\boxed{y = \ln\frac{1}{C-e^x}}$$

8. $2y - x^3y' = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x^3}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln y = -\frac{1}{x^2} + C$

Riešenie rovnice: $y = Ke^{-\frac{1}{x^2}}$

Skúška správnosti: $2y - x^3y' = 2Ke^{-\frac{1}{x^2}} - x^3 \cdot Ke^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3} = 0$

$$\boxed{y = Ke^{-\frac{1}{x^2}}}$$

9. $(y-1)(y-2) - y' = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{(y-1)(y-2)} = 1$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)(y-2)} = \mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $x + C = \int \frac{dy}{(y-1)(y-2)} = \int \frac{(y-1)-(y-2)}{(y-1)(y-2)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y-2} - \int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} = \ln(y-2) - \ln(y-1) = \ln\frac{y-2}{y-1}$

Vyjadrenie y: $Ke^x = \frac{y-2}{y-1}$, $Ke^x(y-1) = y-2$, t.j. $y(Ke^x - 1) = Ke^x - 2$, $y = \frac{Ke^x-2}{Ke^x-1}$

Skúška správnosti: $(y-1)(y-2) - y' = \left(\frac{Ke^x-2}{Ke^x-1} - 1\right)\cdot\left(\frac{Ke^x-2}{Ke^x-1} - 2\right) - \frac{Ke^x(Ke^x-1)-(Ke^x-2)Ke^x}{(Ke^x-2)^2} =$
$\left(\frac{Ke^x-2-Ke^x+1}{Ke^x-1}\right)\cdot\left(\frac{Ke^x-2-2Ke^x+2}{Ke^x-1}\right) - \frac{Ke^x}{(Ke^x-2)^2} = \frac{-1}{Ke^x-1}\cdot\frac{-Ke^x}{Ke^x-1} - \frac{Ke^x}{(Ke^x-1)^2} = 0$

$$\boxed{y = \frac{Ke^x-2}{Ke^x-1}}$$

10. $(1+e^x)yy' = e^x$

Rovnica so separovanými premennými: $yy' = \frac{e^x}{1+e^x}$, t.j. $y\,\mathrm{d}y = \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\frac{1}{2}y^2 = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = 1+e^x \\ \mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + C = \ln(1+e^x) + C$

Vyjadrenie y: $y^2 = 2\ln(1+e^x) + C$

Riešenie rovnice: $y = \pm\sqrt{C + 2\ln(1+e^x)}$

Skúška správnosti: $(1+e^x)yy' = (1+e^x) \cdot \pm\sqrt{C+2\ln(1+e^x)} \cdot \pm\frac{1}{2}\frac{2\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x}{\sqrt{C+2\ln(1+e^x)}} = e^x$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{C + 2\ln(1+e^x)}}$$

11. $y'x^3 + xy = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln y = \frac{1}{x} + C$

Riešenie rovnice: $y = Ke^{\frac{1}{x}}, K \in R$

Skúška správnosti: $y'x^3 + xy = Ke^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot x^3 + xKe^{\frac{1}{x}} = -Ke^{\frac{1}{x}}x + xKe^{\frac{1}{x}} = 0$

$$\boxed{y = Ke^{\frac{1}{x}}, K \in R}$$

12. $\frac{x}{y+1} - \frac{yy'}{1+x} = 0$, $y(0) = 1$

Rovnica so separovanými premennými: $x(x+1) = y(y+1)y'$, t.j. $x(x+1)\,\mathrm{d}x = y(y+1)\,\mathrm{d}y$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2$

Dosadenie okrajových podmienok: $C = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$$\boxed{3y^2 + 2y^3 = 3x^2 + 2x^3 + 5}$$

13. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg} y \operatorname{cotg} x$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{6}$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$, t.j. $\operatorname{cotg} y\,\mathrm{d}y = \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\int \operatorname{cotg} y\,\mathrm{d}y = \int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \left| \begin{matrix} t = \sin y \\ \mathrm{d}t = \cos y\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + C = \ln\sin y = \ln\sin x + C$

Vyjadrenie y: $\sin y = K\sin x$, čiže $y = \arcsin(K\sin x)$

Skúška správnosti: $\frac{K\cos x}{\sqrt{1-K^2\sin^2 x}} = \frac{K\sin x}{\sqrt{1-K^2\sin^2 x}}\frac{\cos x}{\sin x}$

Dosadenie okrajových podmienok: $y(\frac{\pi}{2}) = \arcsin(K) = \frac{\pi}{6}$, $K = \frac{1}{2}$

$$\boxed{y = \arcsin(\tfrac{1}{2}\sin x)}$$

14. $e^{x-y} - y' = 0, y(0) = 1$

Rovnica so separovanými premennými: $y'e^y = e^x$, t.j. $e^y\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $e^y = e^x + C$

Vyjadrenie y: $y = \ln(C + e^x)$, $C + e^x > 0$

Skúška správnosti: $e^{x-y} - \frac{e^x}{C+e^x} = \frac{e^x}{e^y} - \frac{e^x}{C+e^x} = \frac{e^x}{C+e^x} - \frac{e^x}{C+e^x} = 0$

Dosadenie okrajových podmienok: $y(0) = \ln(C+1) = 1$, preto $C + 1 = e$ a $C = e - 1$

Riešenie úlohy: $y = \ln(e - 1 + e^x)$

$$\boxed{y = \ln(e^x + e - 1)}$$

15. $y' - y\operatorname{tg} x = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln y = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln t + C = -\ln\cos x + C$

Riešenie rovnice: $y = \frac{K}{\cos x}, K \in R$

Skúška správnosti: $y' - y\operatorname{tg} x = -\frac{K}{\cos^2 x}(-\sin x) - \frac{K}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

16. $y' - y(x\sin x - \cos x)$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = x\sin x - \cos x$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = (x\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x$

Vyjadrenie y: $\ln|y| = \int(x\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = \int x\sin x\,\mathrm{d}x - \int \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + C + \int\cos x - \int \cos x = -x\cos x + C$

Riešenie rovnice: $y = Ke^{-x\cos x}$

Skúška správnosti: $y' - y(x\sin x - \cos x) = Ke^{-x\cos x}(-\cos x + x\sin x) - Ke^{-x\cos x}(x\sin x - \cos x) = 0$

$$\boxed{y = Ke^{-x\cos x}, K \in R}$$

17. $y' + \frac{1}{x^2}y = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln y = \frac{1}{x} + C$

Riešenie rovnice: $y = Ke^{\frac{1}{x}}, K \in R$

Skúška správnosti: $y' + \frac{1}{x^2}y = Ke^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}Ke^{\frac{1}{x}} = 0$

$$\boxed{y = Ke^{\frac{1}{x}}, K \in R}$$

18. $y' + 3y = x$

Riešenie homogénnej rovnice: $y' + 3y = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -3$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -3\,\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln|y| = -3x + C$

Vyjadrenie y: $|y| = Ke^{-3x}, K > 0$. Odstránením absolútnych hodnôt dostávame, že $y = Ke^{-3x}, K \in R$.

Riešenie y_h: $y_h = Ke^{-3x}, K \in R$

Partikulárne riešenie pre x: tvar $y_p = K(x)e^{-3x}$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $y_p' + 3y_p = K'(x)e^{-3x} - 3K(x)e^{-3x} + 3K(x)e^{-3x} = K'(x)e^{-3x} = x$, t.j. $K'(x) = xe^{3x}$ a $K(x) = \int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x & e^{3x} \\ 1 & \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$

Riešenie y_p: $y_p = K(x)e^{-3x} = \frac{1}{9}(3x-1)$

Riešenie rovnice: $y = y_h + y_p = \frac{1}{9}(3x-1) + Ke^{-3x}$, $K \in R$

Skúška správnosti: $y' + 3y = \frac{1}{3} - 3Ke^{-3x} + x - \frac{1}{3} + 3Ke^{-3x} = x$

$$\boxed{y = \frac{1}{9}(3x-1) + Ke^{-3x},\ K \in R}$$

19. $x^2y' + xy = -1$

Riešenie homogénnej rovnice: $x^2y' + xy = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln|y| = -\ln|x| + C$

Vyjadrenie y: $|y| = \frac{K}{|x|}$, $K > 0$ odstránením absolútnych hodnôt $y = \frac{K}{x}, K \in R$

Riešenie y_h: $y_h = \frac{K}{x}, K \in R$

Partikulárne riešenie pre -1: tvar $y_p = \frac{K(x)}{x}$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $x^2y_p' + xy_p = x^2\left(\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}\right) + x\frac{K(x)}{x} = xK'(x) - K(x) + K(x) = xK'(x) = -1$, t.j. $K'(x) = -\frac{1}{x}$ a $K(x) = -\ln x$.

Riešenie y_p: $y_p = \frac{K(x)}{x} = -\frac{\ln x}{x}$

Riešenie rovnice: $y = y_h + y_p = -\frac{\ln x}{x} + \frac{K}{x}$

Skúška správnosti: $x^2y' + xy = -x^2\left(\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} - \frac{K}{x^2}\right) - x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{K}{x}\right) = -1 + \ln x + K - \ln x - K = -1$

$$\boxed{y = -\frac{\ln x}{x} + \frac{K}{x},\ K \in R}$$

20. $xy' + y = x^3$

Riešenie homogénnej rovnice: $xy' + y = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln|y| = -\ln|x| + C$

Vyjadrenie y: $|y| = \frac{K}{|x|}, K > 0$, $y = 0$ je riešenie a odstránením absolútnej hodnoty dostávame, že $y = \frac{K}{x}, K \in R$.

Riešenie y_h: $y_h = \frac{K}{x}, K \in R$

Partikulárne riešenie pre x^3: tvar $y_p = \frac{K(x)}{x}$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $xy_p' + y_p = x(\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}) + \frac{K(x)}{x} = K'(x) = x^3$ a $K(x) = \int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4$

Riešenie y_p: $y_p = \frac{K(x)}{x} = \frac{1}{4}x^3$

Riešenie rovnice: $y = y_h + y_p = \frac{1}{4}x^3 + \frac{K}{x}$

Skúška správnosti: $xy' + y = x(\frac{3}{4}x^2 - \frac{K}{x^2}) + \frac{1}{4}x^3 + \frac{K}{x} = \frac{3}{4}x^3 - \frac{K}{x^2} + \frac{1}{4}x^3 + \frac{K}{x} = x^3$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{K}{x}, K \in R}$$

21. $y' + \frac{1}{x+1}y = \sin x$

Riešenie homogénnej rovnice: $y' + \frac{1}{x+1}y = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x+1}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln|y| = \int -\frac{\mathrm{d}x}{x+1} = -\ln|x+1| + C$

Vyjadrenie y: $|y| = \frac{K}{|x+1|}, K > 0$. $y = 0$ je riešenie a odstránením absolútnych hodnôt dostávame, že $y = \frac{K}{x+1}$, $K \in R$ je riešenie homogénnej rovnice.

Riešenie y_h: $y_h = \frac{K}{x+1}, K \in R$

Partikulárne riešenie pre $\sin x$: tvar $y_p = \frac{K(x)}{x+1}$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $y_p' + \frac{1}{x+1}y_p = \frac{K'(x)}{x+1} - \frac{K(x)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{K(x)}{x+1} = \frac{K'(x)}{x+1} = \sin x$, t.j. $K'(x) = (x+1)\sin x$ a $K(x) = \int (x+1)\sin x\, dx = \int x \sin x\, dx + \int \sin x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x - \cos x = -(1+x)\cos x + \sin x$

Riešenie y_p: $y_p = \frac{K(x)}{x+1} = -\cos x + \frac{\sin x}{x+1}$

Riešenie rovnice: $y = y_h + y_p = -\cos x + \frac{\sin x}{x+1} + \frac{K}{x+1}$

Skúška správnosti: $y' + \frac{1}{x+1}y = \sin x + \frac{\cos x \cdot (x+1) - \sin x}{(x+1)^2} - \frac{K}{(x+1)^2} - \frac{\cos x}{x+1} + \frac{\sin x}{(x+1)^2} + \frac{K}{(x+1)^2} = \cos x + \frac{\cos x}{x+1} - \frac{\sin x}{(x+1)^2} - \frac{K}{(x+1)^2} - \frac{\cos x}{x+1} + \frac{\sin x}{(x+1)^2} + \frac{K}{(x+1)^2} = \sin x$

$$\boxed{y = -\cos x + \frac{\sin x}{x+1} + \frac{K}{x+1}, K \in R}$$

22. $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$

Riešenie homogénnej rovnice: $(1+x^2)y' + y = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{1+x^2}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C$

Vyjadrenie y: $|y| = Ke^{-\operatorname{arctg} x}, K > 0$. Odstránením absolútnej hodnoty a akceptovaním nulového riešenia, platí $y = \frac{K}{e^{\operatorname{arctg} x}}$, $K \in R$

Riešenie y_h: $y_h = \frac{K}{e^{\operatorname{arctg} x}} = Ke^{-\operatorname{arctg} x}, K \in R$

Partikulárne riešenie pre $\operatorname{arctg} x$: tvar $y_p = K(x)e^{-\operatorname{arctg} x}$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $(1+x^2)y_p' + y_p = (1+x^2)[K'(x)e^{-\operatorname{arctg} x} + K(x)e^{-\operatorname{arctg} x}(-1)\frac{1}{1+x^2}] + K(x)e^{-\operatorname{arctg} x} = K'(x)(1+x^2)e^{-\operatorname{arctg} x} - K(x)e^{-\operatorname{arctg} x} + K(x)e^{-\operatorname{arctg} x} = K'(x)(1+x^2)e^{-\operatorname{arctg} x} = \operatorname{arctg} x$.

Preto $K'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}e^{\operatorname{arctg} x}$ a $K(x) = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \operatorname{arctg} x \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \end{vmatrix} = \int te^t\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix} = te^t - \int e^t = te^t - e^t = e^t(t-1) = e^{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x - 1)$

Riešenie y_p: $y_p = K(x)e^{-\operatorname{arctg} x} = \operatorname{arctg} x - 1$

Riešenie rovnice: $y = y_h + y_p = \operatorname{arctg} x - 1 + Ke^{-\operatorname{arctg} x}$

Skúška správnosti: $(1+x^2)y' + y = (1+x^2)(\frac{1}{1+x^2} + Ke^{-\operatorname{arctg} x}\frac{-1}{1+x^2}) + \operatorname{arctg} x - 1 + Ke^{-\operatorname{arctg} x} = \operatorname{arctg} x$

$$\boxed{y = \operatorname{arctg} x - 1 + Ke^{-\operatorname{arctg} x}}$$

23. $y'\cos x + 2y\sin x = 2\sin x$

Riešenie homogénnej rovnice: $y'\cos x + 2y\sin x = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -2\frac{\sin x}{\cos x}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln|y| = \int -2\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int 2\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|\cos x| + C$

Vyjadrenie y: $|y| = K|\cos x|^2 = K\cos^2 x, K > 0$. Odstránením absolútnych hodnôt a uvážením, že $y = 0$ je tiež riešenie platí $y = K\cos^2 x, K \in R$

Riešenie y_h: $y_h = K\cos^2 x, K \in R$

Partikulárne riešenie pre $2\sin x$: tvar $y_p = K(x)\cos^2 x$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $y_p'\cos x + 2y_p\sin x = [K'(x)\cos^2 x + 2K(x)\cos x(-\sin x)]\cos x + 2K(x)\cos^2 x\sin x = K'(x)\cos^3 x - 2K(x)\cos^2 x\sin x + 2K(x)\cos^2 x\sin x = K'(x)\cos^3 x = 2\sin x$. Teda $K'(x) = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ a $K(x) = \int 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Riešenie y_p: $y_p = K(x)\cos^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x = 1$

Riešenie rovnice: $y = y_p + y_h = 1 + K\cos^2 x$

Skúška správnosti: $y'\cos x + 2y\sin x = 2K\cos x(-\sin x)\cos x + 2\sin x + 2K\cos^2 x\sin x = 2\sin x$

$$\boxed{y = 1 + K\cos^2 x}$$

24. $x\ln(x)y' - 2y = \ln x$

Riešenie homogénnej rovnice: $x\ln(x)y' - 2y = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x\ln x}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2\,\mathrm{d}x}{x\ln x}$

Integrovaním oboch strán dostávame: $\ln|y| = \int \frac{2\,dx}{x\ln x} = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{array} \right| = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|\ln x| + C$

Vyjadrenie y: $e^{\ln|y|} = |y| = e^{2\ln|\ln x| + C} = e^C \cdot (|\ln x|^2) = K\ln^2 x, K > 0$, odstránením absolútnej hodnoty: $y = K\ln^2 x$, pre $K \neq 0$. Ale $y = 0$ vyhovuje ako riešenie, pre všetky $x \in R^+ \setminus \{0\}$.

Riešenie y_h: $y_h = K\ln^2 x$

Partikulárne riešenie pre $\ln x$: tvar $y_p = K(x)\ln^2 x$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $x\ln x y_p' - 2y_p = x\ln x(K'(x)\ln^2 x + 2K(x)\frac{\ln x}{x}) - 2K(x)\ln^2 x = K'(x)x\ln^3 x + 2K(x)\ln^2 x - 2K(x)\ln^2 x = K'(x)x\ln^3 x = \ln x$ t.j. $K'(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ a $K(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} =$

$= \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x}$

Riešenie y_p: $y_p = K(x)\ln^2 x = -\frac{1}{\ln x}\ln^2 x = -\ln x$

Riešenie rovnice: $y = y_h + y_p = C\ln^2 x - \ln x$, pre $C \in R$

Skúška správnosti: $x\ln x(2C\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}) - 2C\ln^2 x + 2\ln x = \ln x$

$$\boxed{y = C\ln^2 x - \ln x, C \in R, x \in R^+ \setminus \{0\}}$$

25. $y' - xy = xe^{x^2}$

Riešenie homogénnej rovnice: $y' - xy = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = x$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = x\,\mathrm{d}x$

Integrovaním obidvoch strán platí: $\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$, t.j. $|y| = e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = Ke^{\frac{1}{2}x^2}, K > 0$. Po odstránení absolútnej hodnoty: $y = Ke^{\frac{1}{2}x^2}, K \neq 0$. Ale homogénna rovnica má riešenie $y = 0$, preto $y = Ke^{\frac{1}{2}x^2}$, pre $K \in R$.

Partikulárne riešenie pre xe^{x^2}: tvar $y_p = K(x)e^{\frac{x^2}{2}}$

Dosadením do pôvodnej rovnice: $y_p' - xy_p = K'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + K(x)xe^{\frac{x^2}{2}} - xK(x)e^{\frac{x^2}{2}} = K'(x)e^{\frac{x^2}{2}} = xe^{x^2}$ t.j. $K'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$ a $K(x) = \int xe^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x^2}{2} \\ \mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Riešenie: $y_p + y_v = e^{x^2} + Ke^{\frac{x^2}{2}}$, $K \in R$.

Skúška správnosti: $2xe^{x^2} + Kxe^{\frac{x^2}{2}} - xe^{x^2} - Kxe^{\frac{x^2}{2}} = xe^{x^2}$

$$\boxed{y = e^{x^2} + Ke^{\frac{x^2}{2}},\ K \in R}$$

26. $y' - \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x$

Riešenie homogénnej rovnice: $y' - \frac{xy}{1-x^2} = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = \frac{x}{1-x^2}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2}$

Integrovaním obidvoch strán dostaneme: $\ln|y| = \int \frac{x}{1-x^2} = \int \frac{1}{2}\frac{1+x-(1-x)}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\left(-\ln|1-x| - \ln|1+x|\right) + C = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\big) + C$. Aplikáciou e^x na obe strany rovnosti dostaneme, že $|y| = K(|1-x^2|)^{-\frac{1}{2}}$, pre $K > 0$. Podobne ako v predošlých úlohách, sa dokáže, že $y = \frac{K}{\sqrt{|1-x^2|}}$, je riešením homogénnej rovnice. Vzhľadom na pravú stranu pôvodnej rovnice ($\arcsin x$) sa musia nachádzať hodnoty $x \in \langle -1, 1\rangle$, dokonca v otvorenom intervale $(-1,1)$(delenie 0), preto môžeme odstrániť absolútnu hodnotu z menovateľa. Takže všeobecné riešenie má nakoniec tvar $\frac{K}{\sqrt{1-x^2}}$.

Partikulárne riešenie pre $\arcsin x$: tvar $y_{p_1} = \frac{K_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

Po dosadení dostaneme: $y'_{p_1} - \frac{xy_{p_1}}{1-x^2} = \frac{K_1'(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{2}K_1(x)\frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{xK_1(x)}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{K_1'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, t.j. $K_1'(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$ a $K_1(x) = \int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x = \sin t (t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle) \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}y \end{matrix}\right| =$

$= \int t|\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t = \int t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int t\left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right) = \int \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int t\cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}\int t\cos 2t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} t & \cos 2t \\ 1 & \frac{1}{2}\sin 2t \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t\sin 2t - \frac{1}{4}\int \sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(t^2 + t\sin 2t) + \frac{1}{8}\cos 2t.$

Návrat k premennej x:

$t = \arcsin x$, preto

$t^2 = \arcsin^2 x$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2x^2$

Takže $K_1(x) = \frac{1}{4}\arcsin^2 x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{8}(1-2x^2)$ a

$y_{p_1} = \frac{1}{4}\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}x\arcsin x + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Partikulárne riešenie pre x: tvar $y_{p_2} = \frac{K_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

Dosadením získame: $y'_{p_2} - \frac{xy_{p_2}}{1-x^2} = \frac{K_2'(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{2}K_2(x)\frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{xK_2(x)}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{K_2'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = x$, t.j. $K_2'(x) = x\sqrt{1-x^2}$ a $K(x) = \int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = 1-x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x, -\frac{1}{2}\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x \end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$. Potom $y_{p_2} = \frac{K_2(x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2)$

Riešenie: $y = y_v + y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{K}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}x\arcsin x + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)$, $K \in R$

Skúška správnosti: $y' = K\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\frac{2\arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} - \arcsin^2 x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{8}\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{3}x = \frac{Kx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{\arcsin x}{1-x^2} + \frac{1}{4}\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\arcsin^2 x + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{8}\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{3}x$

$-\frac{xy}{1-x^2} = -\frac{Kx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4}\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\arcsin^2 x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{8}\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3}x$

$y' - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{\arcsin x}{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{2}\arcsin x + x = \arcsin x + x$

$$\boxed{y = \frac{K}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}x\arcsin x + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}(1-x^2), K \in R}$$

27. $xy' - y = x^2\cos x$

Riešenie homogénnej rovnice: $xy' - y = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{1}{x} = \frac{y'}{y}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$

Integrovaním obidvoch strán rovnice dostávame: $\ln|x| + C = \ln|y|$, t.j. $|y| = K|x|$, $K > 0$. Preto $y = \pm K|x|$, t.j. $y = K|x|$, pre $x \neq 0$. Ale $y = 0$ je tiež riešením, preto $y = K|x|$, platí pre $K \in R$. Obmedzením sa na vhodné intervaly(R^+ resp. R^-) dostávame, že homogénna rovnica má riešenie v tvare $y = Kx$, $K \in R$.

Partikulárne riešenie pre $x^2\cos x$: tvar $y_p = K(x)x$

Dosadením do pôvodnej rovnice dostávame: $xy' - y = x^2K'(x) + xK(x) - xK(x) = x^2\cos x$, t.j. $K'(x) = \cos x$ a $K(x) = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$

Takže $y_p = x\sin x$.

Celkové riešenie: $y = y_v + y_p = x\sin x + Kx$

Skúška správnosti: $xy' - y = x(\sin x + x\cos x + K) - x\sin x - Kx = x^2\cos x$

$$\boxed{y = x\sin x + Kx, K \in R}$$

28. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Riešenie homogénnej rovnice: $y' + 2xy = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -2x$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2x\,\mathrm{d}x$

Integrovaním obidvoch strán dostaneme: $\ln|y| = -x^2 + C$. Čiže $|y| = Ke^{-x^2}, K > 0$. Zbavením sa absolútnej hodnoty, dostaneme, že $y = Ke^{-x^2}$, $K \neq 0$. Ale $y = 0$ je tiež riešenie homogénnej rovnice, takže $y = Ke^{-x^2}, K \in R$.

Partikulárne riešenie pre xe^{-x^2}: tvar $y_p = K(x)e^{-x^2}$

Dosadením do pôvodnej rovnice dostávame: $y_p' + 2xy_p = K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2} + 2xK(x)e^{-x^2} = K'(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$. Preto $K'(x) = x$ a $K(x) = \frac{1}{2}x^2$. Príslušné riešenie je $y_p = K(x)e^{-x^2} = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$

Riešenie rovnice: $y = y_v + y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + Ke^{-x^2}$, $K \in R$

Skúška správnosti: $y' + 2xy = xe^{-x^2} - x^3e^{-x^2} - 2Kxe^{-x^2} + x^3e^{-x^2} + 2Kxe^{-x^2} = xe^{-x^2}$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + Ke^{-x^2}, K \in R}$$

29. $y' + x^2y = x^2$, $y(2) = 1$

Riešenie homogénnej rovnice: $y' + x^2y = 0$

Rovnica so separovanými premennými $\frac{y'}{y} = -x^2$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -x^2\,\mathrm{d}x$

Integrovaním obidvoch strán dostaneme: $\ln|y| = -\frac{1}{3}x^3 + C$, preto $|y| = Ke^{-\frac{1}{3}x^3}, K > 0$. Podobne ako v predošlých riešeniach je možné ukázať, že $y = Ke^{-\frac{1}{3}x^3}, K \in R$ je riešenie homogénnej rovnice.

Partikulárne riešenie pre x^2: tvar $y_p = K(x)e^{-\frac{1}{3}x^3}$

Dosadením do pôvodnej rovnice dostávame: $y_p' + x^2x^2y_p = K'(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} - x^2K(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} + x^2K(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = K'(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = x^2$, t.j. $K'(x) = x^2e^{\frac{1}{3}x^3}$ a $K(x) = \int x^2e^{\frac{1}{3}x^3}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \frac{1}{3}x^3 \\ \mathrm{d}t = x^2\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t = e^{\frac{1}{3}x^3}$.

Riešenie $y_p = K(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = 1$

Riešenie rovnice(bez okrajových podmienok): $y = y_v + y_p = 1 + Ke^{-\frac{1}{3}x^3}$, $K \in R$

Dosadením okrajovej podmienky: $y(2) = 1 + Ke^{-\frac{8}{3}} = 1$, preto $K = 0$ a riešenie úlohy je $y = 1$

$$\boxed{y = 1}$$

30. $y' + y = \cos x, y(0) = 1$

Riešenie homogénnej rovnice: $y' + y = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = -1$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x$

Integrovaním obidvoch strán dostaneme: $\ln|y| = -x + C$, preto $|y| = Ke^{-x}$, $K > 0$. Aplikovaním úvah ako v predošlých riešeniach dostávame, že $y = Ke^{-x}, K \in R$.

Partikulárne riešenie pre $\cos x$: tvar $y_p = K(x)e^{-x}$

Dosadením do pôvodnej rovnice: $y_p' + y_p = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x}\cos x$, t.j. $K'(x) = e^x\cos x$ a $K(x) = \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} e^x & \cos x \\ e^x & \sin x \end{vmatrix} = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = e^x(\cos x + \sin x) - K(x)$. Takže $2K(x) = e^x(\cos x + \sin x)$ a $K(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x)$

$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} e^x & \sin x \\ e^x & -\cos x \end{vmatrix} = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie $y_p = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$

Riešenie rovnice(bez podmienok): $y = y_p + y_v = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ke^{-x}$

Skúška správnosti: $y' + y = \frac{1}{2}(-\sin x + \cos x) - Ke^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ke^{-x} = \cos x$

Dosadenie okrajových podmienok: $y(0) = \frac{1}{2} + K = 1$, t.j. $K = \frac{1}{2}$.

Riešenie úlohy: $\frac{1}{2}(e^{-x}+\cos x+\sin x)$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}(e^{-x}+\cos x+\sin x)}$$

31. $y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$, $n=2,3,...,a>0,y(1)=0$

Riesenie homogénnej rovnice: $y'+\frac{n}{x}y=0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y}=-\frac{n}{x}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-n\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Integrovaním obidvoch strán: $\ln|y|=-n\ln|x|+C=n\ln\frac{1}{|x|}+C=\ln\frac{1}{|x|^n}$. Odstránením absolútnych hodnôt(a aplikovaním podobných úvah ako v predošlý ch riešeniach) dostaneme, že $y=\frac{K}{x^n}$, $K\in R$.

Partikulárne riešenie pre $\frac{a}{x^n}$: tvar $y_p=K(x)x^{-n}$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $y_p'+\frac{n}{x}y_p=K'(x)x^{-n}-nK(x)x^{-n-1}+\frac{n}{x}K(x)x^{-n}=K'(x)x^{-n}=\frac{a}{x^n}$. $K'(x)=a$, preto $K(x)=ax$.

Riešenie $y_p=\frac{a}{x^{n-1}}$

Riešenie rovnice(bez podmienok): $y=y_p+y_v=\frac{a}{x^{n-1}}+\frac{K}{x^{-n}}$.

Skúška správnosti: $y'+\frac{n}{x}y=(1-n)ax^{-n}-nKx^{-n-1}+nax^{-n}+nKx^{-n}=ax^{-n}=\frac{a}{x^n}$

Dosadenie okrajovej podmienky: $y(1)=a+K=0$, t.j. $K=-a$.

Riešenie úlohy: $y=\frac{a}{x^{n-1}}-\frac{a}{x^n}=\frac{a}{x^n}(1-x)$

$$\boxed{y=\frac{a}{x^n}(1-x)}$$

32. $y'+y\operatorname{cotg}x=\sin x$, $y(\frac{\pi}{2})=1$

Riešenie homogénnej: $y'+y\operatorname{cotg}x=0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y}=-\operatorname{cotg}x$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\operatorname{cotg}x\,\mathrm{d}x$.

Integrovaním obidvoch strán dostávame: $\ln|y|=\int-\operatorname{cotg}x=-\int\frac{\cos x}{\sin x}=\left|\begin{array}{c}t=\sin x\\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x\end{array}\right|=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\sin x|+C$, t.j. $|y|=\frac{K}{|\sin x|}$, $K>0$. Odstránením absolútnych hodnôt (viď. pred), dostávame, že všeobecné riešenie homogénnej rovnice je $y_v=\frac{K}{\sin x}$.

Partikulárne riešenie pre $\sin x$: tvar $y_p=\frac{K(x)}{\sin x}$

Dosadením do pôvodnej rovnice: $y_p'+y_p\operatorname{cotg}x=\frac{K'(x)}{\sin x}-\frac{K(x)\cos x}{\sin^2 x}+\frac{K(x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{K'(x)}{\sin x}=\sin x$, t.j. $K'(x)=\sin^2 x$ a $K(x)=\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$.

Riešenie $y_p=\frac{K(x)}{\sin x}=\frac{1}{2}\frac{x}{\sin x}-\frac{1}{4}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\frac{1}{2}\frac{x}{\sin x}-\frac{1}{2}\cos x$

Riešenie rovnice(bez podmienok): $y=y_p+y_v=\frac{1}{2}\frac{x}{\sin x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{K}{\sin x}$

Skúška správnosti: $y'+y\operatorname{cotg}x=\frac{1}{2}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\sin x-K\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\frac{x\cos x}{\sin^2 x}-\frac{1}{2}\frac{\cos^2 x}{\sin x}+K\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{2}\frac{x\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\sin x-K\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\frac{x\cos x}{\sin^2 x}-\frac{1}{2}\frac{1-\sin^2}{\sin x}+K\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\sin x$

Dosadením okrajovej podmienky: $y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}+K=1$, teda $K=\frac{3}{4}\pi$

Riešenie úlohy: $y=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\frac{x}{\sin x}+\frac{3}{4}\frac{\pi}{\sin x}$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\frac{x}{\sin x}+\frac{3}{4}\frac{\pi}{\sin x}}$$

33. $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$, $y(0)=0$

Riešenie homogénnej rovnice: $y'\sqrt{1-x^2}+y=0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

Integrovaním obidvoch strán dostávame: $|y|=Ke^{-\arcsin x}$, $K>0$. Odstránením absolútnych hodnôt(viď. pred) dostáveme, že $y_v=Ke^{-\arcsin x}$, $K\in R$.

Partikulárne riešenie pre $\arcsin x$: tvar $y_p=K(x)e^{-\arcsin x}$

Dosadením do pôvodnej rovnice: $y_p'\sqrt{1-x^2}+y_p=K'(x)\sqrt{1-x^2}e^{-\arcsin x}-K(x)e^{-\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}+K(x)e^{-\arcsin x}=K'(x)\sqrt{1-x^2}\,e^{-\arcsin x}=\arcsin x$. Preto $K'(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}$ a

$$K(x)=\int\frac{e^{\arcsin x}\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l}t=\arcsin x\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right|=\int te^t\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{ll}t & e^t\\ 1 & e^t\end{array}\right|=te^t-\int e^t\,\mathrm{d}t=te^t-e^t=e^t(t-1)=$$
$$=e^{\arcsin x}(\arcsin x-1)$$

Riešenie $y_p=K(x)e^{-\arcsin x}=\arcsin x-1$

Riešenie rovnice(bez podmienok): $y = y_p + y_v = \arcsin x - 1 + Ke^{-\arcsin x}$

Skúška správnosti: $y'\sqrt{1-x^2} + y = (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - Ke^{-\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - 1 + Ke^{-\arcsin x} =$

$= 1 - Ke^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1 + Ke^{-\arcsin x} = \arcsin x$

Dosadením okrajovej podmienky: $y(0) = -1 + K = 0$, dostávame, že $K = 1$

Riešenie úlohy: $e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$

34. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = \frac{e^2}{2}$

Riešenie homogénnej rovnice: $y' - \frac{y}{x\ln x} = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x\ln x}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

Integrovaním obidvoch strán dostávame: $\ln|y| =\in \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C =$ $\ln|\ln x| + C$. Vyjadrením y, dostávame: $|y| = K|\ln x|$, $K > 0$. Odstránením absolútnych hodnôt a uvážením, že $y = 0$ je riešenie, dostávame, že riešenie homogénnej rovnice je v tvare $y = K\ln x$, pre $K \in R$.

Partikulárne riešenie pre $x\ln x$: tvar $y_p = K(x)\ln x$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $y_p' - \frac{y_p}{x\ln x} = K'(x)\ln x + \frac{K(x)}{x} - \frac{K(x)\ln x}{x\ln x} = K'(x)\ln x + \frac{K(x)}{x} - \frac{K(x)}{x} =$ $K'(x)\ln x = x\ln x$, čiže $K'(x) = x$ a $K(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Riešenie $y_p = \frac{1}{x^2\ln x}$

Riešenie rovnice(bez podmienok): $y = y_v + y_p = \frac{1}{2}x^2\ln x + K\ln x$

Skúška správnosti: $y' - \frac{y}{x\ln x} = \frac{1}{2}(2x)\ln x + \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x} + \frac{K}{x} - \frac{1}{2}x - \frac{K}{x} = x\ln x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x\ln x$

Dosadenie okrajovej podmienky: $y(e) = \frac{1}{2}e^2 + K = \frac{1}{2}e^2$, t.j. $K = 0$.

Riešenie úlohy: $y = \frac{1}{2}x^2\ln x$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2\ln x}$$

35. $y'\sin x - y\cos x = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Riešenie homogénnej rovnice: $y'\sin x - y\cos x = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}$, t.j. $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Integrovaním obidvoch strán dostávame: $\ln|y| = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C =$ $\ln|\sin x| + C$, preto $|y| = K|\sin x|, K > 0$. Odstránením absolútnych hodnôt dostávame riešenie v tvare $y = K\sin x$, $K \in R$. ($y = 0$ je tiež riešenie).

Partikulárne riešenie pre 1: tvar $y_p = K(x)\sin x$

Dosadenie do pôvodnej rovnice: $y_p'\sin x - y_p\cos x = (K'(x)\sin x + K(x)\cos x)\sin x - K(x)\sin x\cos x =$ $K'(x)\sin^2 x = 1$, t.j. $K'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ a $K(x) = -\operatorname{cotg} x$.

Riešenie $y_p = K(x)\sin x = -\operatorname{cotg} x\sin x = -\cos x$.

Riešenie rovnice(bez podmienok): $y = y_v + y_p = -\cos x + K\sin x$, $K \in R$.

Skúška správnosti: $y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x + K\cos x\sin x + \cos^2 x - K\sin x\cos x = 1$

Dosadenie okrajovej podmienky: $y(\frac{\pi}{2}) = K = 0$, t.j. $K = 0$.

Riešenie úlohy: $y = -\cos x$.

$$\boxed{y = -\cos x}$$