Náznaky riešení príkladov z 2. písomky pre 21APS

A1: $2x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0, y(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, y(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

Rovnica so separovanými premennými: $2x\,\mathrm{d}x = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$

Integrovaním obidvoch strán dostaneme: $x^2 + C = \sqrt{1-y^2}$, po vyjadrení y: $|y| = \sqrt{1-(x^2+C)^2}$, t.j. rovnica má dve riešenia: $y_{1,2} = \pm\sqrt{1-(x^2+C)^2}$

Dosadením hodnoty $x = \frac{1}{2}$, dostaneme:

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\sqrt{1-(\frac{1}{4}+C)^2}$, t.j. $\frac{3}{4} = 1-(\frac{1}{4}+C)^2$ a $\frac{1}{4} = (\frac{1}{4}+C)^2$, čiže $\frac{1}{4}+C = \pm\frac{1}{2}$.

Získame dvoch kandidatov na riešenie: $C_1 = \frac{1}{4}$ a $C_2 = -\frac{3}{4}$.

Podobne dosadením $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ platí:

$0 = \pm\sqrt{1-(\frac{3}{4}+C)^2}$. Toto je možné len pre $C = \frac{1}{4}$, preto riešením rovnice je funkcia $y = \sqrt{1-(x^2+\frac{1}{4})^2}$.

$$\boxed{y = \sqrt{1-(x^2+\tfrac{1}{4})^2}}$$

B1: $x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 0$, $y(0) = 1$

Rovnica so separovanými premennými: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$

Integrovaním obidvoch strán dostanem: $C - \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2}$

Vyjadrenie y: $1-y^2 = (C-\sqrt{1-x^2})^2$, t.j. $|y| = \sqrt{1-(C-\sqrt{1-x^2})^2}$, čiže

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{1-(C-\sqrt{1-x^2})^2}$$

Dosadením hodnoty $x = 0$:

$1 = \pm\sqrt{1-(C-1)^2}$, t.j. $(C-1)^2 = 0$ a $C = 1$

Preto $y = \sqrt{1-(1-\sqrt{1-x^2})^2}$ je riešením. Po úprave: $\sqrt{2\sqrt{1-x^2}+x^2-1}$

$$\boxed{\sqrt{2\sqrt{1-x^2}+x^2-1}}$$

A2: $y'' - 2y' - 3y = -4e^{-x} + 2 - 9x^2$

charakteristická rovnica k homogénnej rovnici: $x^2 - 2x - 3 = 0$, korene $x_1 = -1, x_2 = 3$

všeobecné riešenie: $y_v = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$

Pravá strana obsahuje 2 rôzne typy EP, preto použijeme princíp superpozície:

Partikulárne riešenie y_{p_1}, pre $-4e^{-x}$

Typ: EP, tvar pravej strany: $P(x)e^{ax}$, kde $P(x) = -4, st(P) = 0, a = -1$, $k = 1$

Tvar hľadaného partikulárneho riešenia: $y_{p_1} = x^k\hat{P}(x)e^{ax}$, t.j. $y_{p_1} = Cxe^{-x}$.

Potom $y'_{p_1} = Ce^{-x}(1-x)$, $y''_{p_1} = Ce^{-x}(x-2)$.

Dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme:

$y''_{p_1} - 2y'_{p_1} - 3y_{p_1} = Ce^{-x}(x-2-2+2x-3x) = -4Ce^{-x}$.

Porovnaním s pravou stranou dostaneme, že $C = 1$.

Príslušné partikulárne riešenie y_{p_1} sa rovná xe^{-x}.

Partikulárne riešenie y_{p_2} pre $2 - 9x^2$:

Typ: EP, tvar pravej strany: $P(x)e^{ax}$, kde $P(x) = 2 - 9x^2, st(P) = 2, a = 0, k = 0$.

Partikulárne riešenie v tvare: $x^k\hat{P}(x)e^{ax}$ t.j. $y_{p_2} = Ax^2 + Bx + C$.

Potom $y'_{p_2} = 2Ax + B$, $y''_{p_2} = 2A$.

Dosadením do pôvodnej rovnice dostávame: $y''_{p_2} - 2y'_{p_2} - 3y_{p_2} =$

$= 2A - 4Ax - 2B - 3Ax^2 - 3Bx - 3C = (2A - 2B - 3C) + x(-4A - 3B) + x^2(-3A)$

Porovnaním s pravou stranou dostaneme, že $A = 3, B = -4, C = 4$.

Riešenie diferenciálnej rovnice je $y_v + y_{p_1} + y_{p_2}$, t.j. $C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + xe^{-x} + 3x^2 - 4x + 4$

$$\boxed{C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + xe^{-x} + 3x^2 - 4x + 4}$$

B2: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2 + 1$

Charakteristická rovnica k homogénnej rovnici: $x^2 - 3x + 2 = 0$, t.j. $x_1 = 1, x_2 = 2$.
Všeobecné riešenie: $y_v = C_1e^x + C_2e^{2x}$.
Pravá strana obsahuje 2 rôzne časti typu EP.
Partikulárne riešenie y_{p_1} pre $3e^{2x}$:
Typ: EP, Pravá strana: $P(x)e^{ax}$, kde $P(x) = 3, st(P) = 0, a = 2, k = 1$.
Partikulárne riešenie v tvare: $x^k\hat{P}(x)e^{ax}$, t.j. $y_{p_1} = Cxe^{2x}$.
$y'_{p_1} = Ce^{2x}(2x + 1), y''_{p_1} = Ce^{2x}(4x + 4)$.
Dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme:
$y''_{p_1} - 3y'_{p_1} + 2y_{p_1} = Ce^{2x}(4x + 4 - 6x - 3 + 2x) = Ce^{2x}$.
Porovnaním s pravou stranou dostaneme, že $C = 3$, a preto $y_{p_1} = 3xe^{2x}$.
Partikulárne riešenie pre $2x^2 + 1$:
Typ: EP, Pravá strana $P(x)e^{ax}$, kde $P(x) = 2x^2 + 1, st(P) = 2, a = 0, k = 0$.
Partikulárne riešenie v tvare: $x^k\hat{P}(x)e^{ax}$, t.j. $y_{p_2} = Ax^2 + Bx + C$.
$y'_{p_2} = 2Ax + B, y''_{p_2} = 2A$.
Dosadením do pôvodnej rovnice: $y''_{p_2} - 3y'_{p_2} + 2y_{p_2} =$
$= 2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = (2A - 3B + 2C) + x(-6A + 2B) + x^2(2A)$.
Porovnaním s pravou stranou: $A = 1, B = 3, C = 4$, preto $y_{p_2} = x^2 + 3x + 4$
Riešenie rovnie je $y_v + y_{p_1} + y_{p_2}$, t.j. $C_1e^x + C_2e^{2x} + 3xe^{2x} + x^2 + 3x + 4$.

$$\boxed{C_1e^x + C_2e^{2x} + 3xe^{2x} + x^2 + 3x + 4}$$

A3: $\arcsin(x + y)$
arcsin je definovaný pre argumenty z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, preto pre $x + y$ musí platiť: $-1 \leq x + y \leq 1$. Inak zapísané: $\{(x, y) : -1 - x \leq y \leq 1 - x\}$. Oblasť medzi dvoma priamkami: $y = -1 - x, y = 1 - x$.
B3: $\arccos(x - y)$
arccos je definovaný pre argumenty z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, preto pre $x - y$ musí platiť: $-1 \leq x - y \leq 1$. Inak zapísané: $\{(x, y) : -1 + x \leq y \leq 1 + x\}$. T.j. Oblasť medzi dvoma priamkami: $y = -1 + x, y = 1 + x$.
A4: $\lim_{(x,y)\to(0,3)} x \operatorname{cotg} xy$
$\lim_{(x,y)\to(0,3)} x \operatorname{cotg} xy = \lim_{(x,y)\to(0,3)} x\frac{\cos(xy)}{\sin(xy)} = \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x}{\sin(xy)} \cdot \cos(xy) =$
$= \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot \frac{\cos(xy)}{y} = \lim_{x\cdot y\to 0} \frac{x\cdot y}{\sin(x\cdot y)} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\cos(xy)}{y} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

B4: $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$
$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin(xy)}{\cos(xy)} \cdot \frac{1}{y} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{x}{\cos(xy)} =$
$= \lim_{x\cdot y\to 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x}{\cos(xy)} = 1 \cdot 1 = 1$

$$\boxed{1}$$

A5: $f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$
$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{4}{x^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{2}{y^2}$
Kandidátov na extrémy dostaneme riešením sústavy: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Dostávame, že $y^2 = \frac{2}{x} = \frac{16}{x^4}$, preto $x^4 = 8x$, s vylúčením $x = 0$, ktoré je mimo definičného oboru. To nám dá jediného kandidáta na extrém: $x = 2$, $y = 1$.
Charakter kandidáta na extrém určíme výpočtom druhých parciálnych derivácií v bode $(2, 1)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{x^3}(2,1) & 1 \\ 1 & \frac{4}{y^3}(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rohové determinanty sú kladné, preto je forma pozitívne definitná a ide o lokálne minimum.

$$\boxed{(2,1) \text{ - lokálne minimum}}$$

B5: $f(x, y) = 2xy + \frac{4}{x} + \frac{1}{y}$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - \frac{4}{x^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - \frac{1}{y^2}$

Kandidát na extrém dostaneme zo sústavy $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Po dosadení a malej úprave: $2y^2 = \frac{1}{x} = \frac{8}{x^4}$. Čiže $8x = x^4$. S vylúčením $x = 0$(mimo def. obor.) dostávame, jediného kandidáta na extrém, a to $x = 2, y = \frac{1}{2}$.

Charakter kandidáta:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, \frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, \frac{1}{2}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, \frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{x^3}(2, \frac{1}{2}) & 2 \\ 2 & \frac{2}{y^3}(2, \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Rohové determinanty sú kladné, teda ide o kladne definitnú formu, t.j. lokálne minimum.

$$\boxed{(2, \tfrac{1}{2}) \text{ - lokálne minimum}}$$

Pozn: Vo všeobecnosti stačí kladná alebo záporná definitnosť na nejakom rýdzom okolí skúmaného bodu. T.j. určí sa druhý diferenciál: $\mathrm{d}^2 f(X, (a, b)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y - b)^2$ a zisťuje sa či náhodou neexistuje celé okolie, pre ktoré sú hodnoty v bodoch tohto okolia (mimo (a, b)) ostro väčšie, alebo ostro menšie ako 0.

Ak sa pre ľubovoľné okolie nájdu hodnoty aj menšie aj väčšie, tak ide o indefinitnú formu a skúmaný bod je tzv. sedlový bod.

Inak, ak existuje okolie, v ktorom sú hodnoty iba väčšie, tak ide o kladne definitnú formu, a teda lokálne minimum a v opačnom prípade o záporne definitnú formu, t.j. lokálne maximum.