1. $e^{x-y} - y' = 0, y(0) = 1$

Rovnica so separovanými premennými: $y'e^y = e^x$, t.j. $e^y\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$
Integrovaním oboch strán dostávame: $e^y = e^x + C$
Vyjadrenie y: $y = \ln(C + e^x)$, $C + e^x > 0$
Skúška správnosti: $e^{x-y} - \frac{e^x}{C+e^x} = \frac{e^x}{e^y} - \frac{e^x}{C+e^x} = \frac{e^x}{C+e^x} - \frac{e^x}{C+e^x} = 0$
Dosadenie okrajových podmienok: $y(0) = \ln(C+1) = 1$, preto $C + 1 = e$ a $C = e - 1$
Riešenie úlohy: $y = \ln(e - 1 + e^x)$

$$\boxed{y = \ln(e^x + e - 1)}$$

2. $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x} - 9$

1. Riešenie homogénnej rovnice $y'' - 6y' + 9y = 0$:
charakteristická rovnica: $x^2 - 6x + 9 = 0 = (x-3)^2 = 0$

$x_{1,2} = 3$
všeobecné riešenie: $y_v = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

Partikulárne riešenie pre $2e^{3x}$:

2. Hľadanie partikulárneho riešenia: typ EP
Pravá strana: $e^{mx}P(x)$, kde
$m = 3$, $P(x) = 2$, $\mathrm{st}(\hat{P}(x)) = \mathrm{st}(P(x)) = 0$, $k = 2$, preto
$y_p = x^k e^{mx}\hat{P}(x) = Cx^2e^{3x}$
$y_p' = Ce^{3x}(2x + 3x^2)$, $y_p'' = Ce^{3x}(6x + 9x^2 + 2 + 6x) = Ce^{3x}(9x^2 + 12x + 2)$
Dosadenie do pôvodnej rovnice: $2e^{3x} = y_p'' - 6y_p' + 9y_p = Ce^{3x}(9x^2 + 12x + 2 - 12x - 18x^2 + 9x^2) = 2Ce^{3x}$, t.j. $C = 1$
Riešenie y_p: $y_{p_1} = x^2e^{3x}$

Partikulárne riešenie pre -9:

2. Hľadanie partikulárneho riešenia: typ EP
Pravá strana: $e^{mx}P(x)$, kde $m = 0, P(x) = -9, \mathrm{st}(P(x)) = 0, k = 0$, preto
$y_p = x^k e^{mx}\hat{P}(x) = C$
$y_p' = y_p'' = 0$
Dosadenie do pôvodnej rovnice: $9C = -9$, $C = -1$
Riešenie y_p: $y_{p_2} = -1$

Riešenie rovnice: $y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_v = x^2e^{3x} - 1 + C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} = -1 + e^{3x}(x^2 + C_2x + C_1)$

$$\boxed{y = -1 + e^{3x}(x^2 + C_2x + C_1)}$$

3. $\ln(\frac{1}{x^2+y^2-1})$

Zlomok je definovaný pre $x^2 + y^2 \neq 1$ a ln pre $\frac{1}{x^2+y^2-1} > 0$. Spojením obidvoch podmienok dostávame, že $x^2 + y^2 - 1 > 0$. Vonkajšok kruhu so stredom $(0,0)$ a polomerom 1.

$$\boxed{D(f) = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\}, \text{ vonkajšok kruhu so stredom } (0,0) \text{ a polomerom } 1}$$

4. $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x}{\sqrt{1-x+y}-\sqrt{1+2x+y}}$

$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x}{\sqrt{1-x+y}-\sqrt{1+2x+y}} = \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x}{\sqrt{1-x+y}-\sqrt{1+2x+y}} \cdot \frac{(\sqrt{1-x+y}+\sqrt{1+2x+y})}{(\sqrt{1-x+y}+\sqrt{1+2x+y})} =$

$= \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x(\sqrt{1-x+y}+\sqrt{1+2x+y})}{(1-x+y)-(1+2x+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x(\sqrt{1-x+y}+\sqrt{1+2x+y})}{-3x} =$

$= \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sqrt{1-x+y}+\sqrt{1+2x+y}}{-3} = -\frac{4}{3}$

$$\boxed{-\frac{4}{3}}$$

5. $f(x,y) = \ln(xy) - 2x - 3y + 15 \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - 2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - 3$

Kandidát na extrém: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, t.j. $\frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{y} - 3 = 0$ a $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$
Charakter extrému:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Rohové determinanty majú striedavé znamienka(začínajúce mínusom), čiže ide o záporne definitnú formu, a teda lokálne maximum.

$$\boxed{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3})_{max}}$$