Cvičenia 6.5. a 13.5. 2003

Ďalšie príklady na limity, Spojitosť, Gradient, Totálny diferenciál funkcií viacerých premenných
Taylorova veta, Lokálne extrémy, Extrémy s väzbou, Globálne extrémy

1. Vypočítajte limitu: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$

Zistite, či existuje limita $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ a určte postupné limity

t.j. $\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)]$, $\lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x,y)]$:

2. $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y}$, $a=\infty, b=\infty$ **3.** $f(x,y)=\frac{y^x}{1+y^{2x}}$, $a=0, b=\infty$

4. $f(x,y)=\frac{\sin(\pi x)}{2x+y}$, $a=\infty, b=\infty$ **5.** $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$, $a=0, b=0$

6. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$, $a=\infty, b=\infty$ **7.** $f(x,y)=(x+y)\operatorname{tg}\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{1}{y}$, $a=0, b=0$

8. $f(x,y)=\begin{cases}4-x-y & x\neq 2, y\neq 1\\ 3 & x=2, y=1\end{cases}$ **9.** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Určte body nespojitosti:

10. $f(x,y)=\sin\frac{1}{x-y}$ **11.** $f(x,y)=\frac{x^2+3y^2+5}{y^2-2x}$ **12.** $f(x,y)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

13. $z=\frac{x+y}{x-y}$ **14.** $z=\sin\frac{1}{|x|-|y|}$ **15.** $z=\ln|1-x^2-y^2|$ **16.** $f(x,y,z)=\frac{3z}{x-2y+3z}$

Totálny diferenciál:

17. $f(x,y)=x^2-2xy-3y^2$, $A=(-1,1)$ **18.** $f(x,y)=e^{xy}$, $A=(0,0)$

19. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $A=(0,0)$ **20.** $x^5y^3z^3$ **21.** $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ **22.** $e^{\alpha x}\cos(\frac{\beta y}{z})$

23. $\operatorname{arctg}(\frac{yz}{x^2})$

Vypočítajte približne:

24. $\sqrt{3{,}03^2+9{,}01^2}$ **25.** $1{,}05^{2{,}01}$ **26.** $\sin 151^\circ \operatorname{cotg} 41^\circ$ **27.** $\ln(\sqrt{0{,}96}+\sqrt[3]{1{,}02}+2)$

Diferenciál vyšších rádov:

$\mathrm{d}^2 f(A,X)$, ak: **28.** $f(x,y)=e^{xy}$, $A=(0,0)$ **29.** $f(x,y,z)=xy+yz+xz$, $A=(1,1,0)$

30. $f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2}$, $A=(1,1,-2)$ **31.** $f(x,y)=x^2y^2$, $A=(1,1)$

32. $\mathrm{d}^3 f(A,X)$, ak $f(x,y,z)=xyz$, $A=(7,11,-10)$

McLaurinov rozvoj:

33. $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$, $n=5$ **34.** $f(x,y)=e^x\sin y$, $n=3$ **35.** $f(x,y)=x^3+y^3-2xy$, $n=3$

Taylorov rozvoj:

36. $f(x,y)=x^y$, $(1,1)$, $n=2$ **37.** $f(x,y)=\sin x\cos y$, $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, $n=3$

Extrémy:

Lokálne:

38. $f(x,y)=1+6y-y^2-xy-x^2$ **39.** $f(z,t)=5+6z-4z^2-3t^2$

40. $f(x,y)=x^3+y^3-18xy+215$ **41.** $f(x,y)=\sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$

42. $f(x,y,z)=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}$

Viazané(s väzbou):

43. $z=xy-x+y-1$, ak $x+y=1$ **44.** $z=x+y$, ak $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$ **45.** $z=x^2+y^2$, ak $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

46. $u=\cos x\cos y\cos z$, ak $x+y+z=-\pi$ **47.** $u=xyz$, ak $x^2+y^2+z^2=3$

48. $u=x^2+y^2+z^2$, ak $x+y-3z+7=0, x-y+z-3=0$

Globálne(absolútne):

49. $f(x,y)=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ na oblasti $x\geq 0$, $y\geq 0$, $y\leq -x+3$

50. $f(x,y)=xy^2(4-x-y)$ na oblasti ohraničenej krivkami $x=0, y=0, x+y=6$

51. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ na obdĺžniku s vrcholmi $A=(0,-1)$, $B=(2,-1)$, $C=(2,2)$, $D=(0,2)$

52. $f(x,y)=\cos x\cos y\cos(x+y)$ na štvorci $A=(0,0)$, $B=(\pi,0)$, $C=(\pi,\pi)$, $D=(0,\pi)$

53. $f(x,y)=x^2+y^2$, na kruhu $x^2+y^2\leq 4$ **54.** $f(x,y,z)=x+y+z$, na oblasti $1\geq x\geq y^2+z^2$