Vzorové riešenia úloh 1. písomky - VHVS 4. skupina

10.10. 2002

1. (4b) Je daná funkcia $f(x) = \log_2\left(\frac{5x+7}{7-2x}\right)$.

a) (2b) Určte definičný obor – $D(f)$ a obor hodnôt – $H(f)$.

Definičný obor zlomku sú všetky reálne čísla, pre ktoré je jeho menovateľ rôzny od 0. Logaritmus je definovaný len pre kladné čísla. Preto je definičný obor daný sústavou nerovníc:

$$\frac{5x+7}{7-2x} > 0, \quad 7-2x \neq 0.$$

Riešenie prvej možno previesť na riešenie ďalšej sústavy, pretože podiel dvoch čísel(nenulových) je kladný práve vtedy, keď sú buď obe kladné alebo obe záporné. Takže definičný obor f je

$$\{x \in \mathbb{R} : \big((5x+7 > 0 \wedge 7-2x > 0) \vee (5x+7 < 0 \wedge 7-2x < 0)\big) \wedge 7-2x \neq 0\},$$

pričom podledná podmienka je zbytočná, keďže je obsiahnutá v predchádzajúcich.

$5x+7 > 0 \Leftrightarrow 5x > -7 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{5}$

$7-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$(násobenie resp. delenie záporným číslom) Keď to dáme dokopy, tak dostávame, že $x \in \left(-\frac{7}{5}, \frac{7}{2}\right)$.

Podobne druhá sústava nerovníc nám dáva:

$5x+7 < 0 \Leftrightarrow 5x < -7 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{5}$

$7-2x < 0 \Leftrightarrow 7 < 2x \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$

Tieto 2 nerovnosti však nemôžu byť splnené navzájom preto riešením je prázdna množina t.j. $\emptyset$.

Kombináciou jednotlivých riešení dostáme:

$$x \in \left(-\frac{7}{5}, \frac{7}{2}\right) = D(f).$$

Obor hodnôt sa určí na základe výsledku časti c), pretože pre prosté funkcie platí $H(f) = D(f^{-1})$.

b) (1b) Zistite, či je prostá, párna, nepárna.(zdôvodnite)

Zloženie prostých funkcií je prostá funkcia + využitie prostosti funkcie $\log_2 x$ a lineárnej lomenej funkcie.

Vzhľadom na nesymetrický definičný obor nemôže byť funkcia párna = symetrická podľa osi y, resp. nepárna = symetrická podľa počiatku súradnicovej sústavy.

c) (1b) Vypočítajte inverznú funkciu k $f(x)$.

Z $y = \log_2\left(\frac{5x+7}{7-2x}\right)$ vyjadrime x:

$2^y = \frac{5x+7}{7-2x}$

$(7-2x)\cdot 2^y = 5x+7$

$7\cdot 2^y - 2x\cdot 2^y = 5x+7$

$7\cdot 2^y - 7 = 5x + x\cdot 2^{y+1}$

$7\cdot(2^y-1) = x\cdot(2^{y+1}+5)$

$x = 7\cdot\left(\frac{2^y-1}{2^{y+1}+5}\right)$

Preto inverzná funkcia k f je:

$$y = 7\cdot\frac{2^x-1}{2^{x+1}+5}$$

Jej definičný obor je daný definičným oborom zlomku t.j. nenulovosťou menovateľa. Ale exponenciálna funkcia je vždy kladná, preto je menovateľ nenulový pre každé $x \in \mathbb{R}$. Toto je zároveň $H(f)$.

2. (2b) Vypočítajte limitu funkcie:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^4+11x^3+45x^2+81x+54}{x^4+7x^3+9x^2-27x-54}$$

Najprv preverme, či náhodu nie je funkcia spojitá v bode -3. Na výpočet hodnoty menovateľa v bode -3 použime Hornerovu schému.

	menovateľ						čitateľ				
	1	7	9	-27	-54		1	11	45	81	54
-3	0	-3	-12	9	54	-3	0	-3	-24	-63	-54
	1	4	-3	-18	**0**		1	8	21	18	**0**
-3	0	-3	-3	18		-3	0	-3	-15	-18	
	1	1	-6	**0**			1	5	6	**0**	
-3	0	-3	6			-3	0	-3	-6		
	1	-2	**0**				1	2	**0**		
-3	0	-3				-3	0	-3			
	1	$\mathbf{-5}$					1	$\mathbf{-1}$			

Aplikovali sme osemkrát hornerovu schému, štyri razy pre menovateľa a štyrikrát na čitateľa. Ak by sme skončili už pri 3×m, 3×č, tak dostávame, že čitateľ sa rovná $(x+2)(x+3)^3$. Podobne menovateľ sa rovná $(x-2)(x+3)^3$. Preto $\lim_{x\to-3}\frac{(x+2)(x+3)^3}{(x-2)(x+3)^3} = \lim_{x\to-3}\frac{x+2}{x-2} = \frac{\lim_{x\to-3} x+2}{\lim_{x\to-3} x-2} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$.

Po aplikovaní týchto ôsmych výočtov máme, že čitateľ sa rovná $(x+3)^4-1$ a menovateľ sa rovná $(x+3)^4-5$, a preto celková limita sa rovná $\frac{(-3+3)^4-1}{(-3+3)^4-5}$, čo je opäť $\frac{1}{5}$.

3. (2b) Nájdite limitu postupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{2n+5}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{2n+5} =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1-2}{n^2+1}\right)^{2n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{2n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{2}}\right)^{2n+5} =: V.$

Keď $n\to\infty$, tak základ $\to 1$ a exponent $\to\infty$. Preto je to limita typu 1^∞.

Použime základnú limitu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Potom $V = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{2}}\right)^{1\cdot(2n+5)} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{2}}\right)^{\frac{n^2+1}{2}\cdot\frac{2}{n^2+1}\cdot(2n+5)}$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{2}}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}\right]^{\frac{2}{n^2+1}\cdot 2n+5} =$

$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{2}}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(2n+5)}{n^2+1}}$

$= \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{\lim_{n\to\infty} 2\cdot(\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2})}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{e}^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{e}^{0} = 1.$

4. (2b) Určte asymptoty k funkcii $y = \frac{3x^3+2}{x^2-4}$.

Asymptoty bez smernice:

Kandidáti na asymptoty bez smernice sú body mimo definičného oboru funkcie. Zlomok je definovaný, ak jeho menovateľ je rôzny od 0. Preto kandidátmi na asymptoty bez smernice sú body x=-2, x=2.

$\lim_{x\to-2^-} = +\infty, \quad \lim_{x\to-2^+} = -\infty$

$\lim_{x\to2^-} = -\infty, \quad \lim_{x\to2^+} = +\infty$

Vidíme, že je splnená základná podmienka na to, aby bod bol asymptotou bez smernice(t.j. aspoň jedna jednostranná limita je nevlastná t.j. rovná $+\infty$ alebo $-\infty$). Tak x=-2, x=2 sú asymptotami bez smernice. Asymptoty so smernicou:

Najprv určme smernicu:
$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(3+\frac{2}{x^3})}{x^3(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 3+\frac{2}{x^3}}{\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{4}{x^2}} = 3.$

Posunutie:
$b = \lim_{x\to+\infty} f(x)-ax = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-2}{x^2-4} - 3x = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-2-3x(x^2-4)}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-2-3x^3+12x}{x^2-4} =$
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{12x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\frac{12}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{\lim_{x\to+\infty} \frac{12}{x}-\frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$

Preto asymptota v bode $+\infty$ je $y = 3x + 0$, t.j. $y = 3x$.

Podobným spôsobom sa určí asymptota v bode $-\infty$. Zhodou okolností všetky limity sú rovnaké, preto asymptota v $-\infty$ je tiež $y = 3x$.