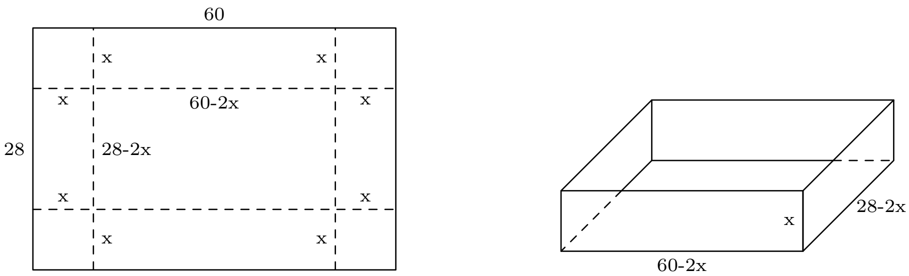
Náznaky riešení 2. písomky - 1.ročník 4VHVS

1. Jediný problém v tejto "slovnej úlohe", jej transformácia na úlohu hľadania extrému. Keď sa to nakreslí (príp. predstaví, alebo ináč vizualizuje - viď. obr.1 dolu), tak pre objem danej krabice platí, $V = x\cdot(28-2x)\cdot(60-2x) = 4x\cdot(14-x)\cdot(30-x) = 4(x^3-44x^2+420x)$, kde x je dĺžka strany vystrihnutého štvorca. Potom sa derivácia V' rovná $4(3x^2-88x+420)$. Keďže je úloha zameraná na nájdenie maxima(t.j. extrému(ov)), tak najdením riešenia rovnice $V'=0$, dostaneme kandidátov na extrémy: $D = 88^2-4\cdot 3\cdot 420 = 2704, \sqrt{D} = 52, x_1 = 23,\overline{3}, x_2 = 6$ Keďže hľadaný rozmer vystrihnutia musí byť menší ako 14, tak jediným zmysluplným kandidátom je 6. Výpočtom druhej derivácie, $y'' = 4(6x-88)$, sa naozaj presvedčíme($y''(6) < 0$), že je to hľadané vystrihnutie, pri ktorom sa dosahuje maximum. Potom hodnota maximálneho objemu je $V_{\max} = 6\cdot 16\cdot 48 = 4608$.



obr. 1

2. *Definičný obor* funkcie sú všetky reálne čísla. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.(Definičný obor funkice e^x je , jej argument $-\frac{x^2}{2}$ je tiež definovaný na R, x tiež. Definičný obor súčinu je prienikom definičných oborov jednotlivých činiteľov, t.j. $\mathbb{R}\cap\mathbb{R} = \mathbb{R}$.)

Párnosť, nepárnosť, cyklickosť: Funkcia je nepárna, pretože $f(-x) = -xe^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x)$, čiže je symetrická podľa počiatku súradnicovej sústavy.

Keďže definičný obor sú všetky reálne čísla, tak nemá funkcia asymptoty bez smernice.

Nulové body: Jedine x=0 je koreňom funkcie.

Monotónnosť: $y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$. Funkcia e^x je nezáporná, preto na znamienko prvej derivácie má vplyv len výraz $(1-x^2)$, a preto stacionárne body sú ± 1. Stacionárne body rozdelia definičný obor(t.j. celú reálnu os) na intervaly: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. Na intervaloch $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$ je prvá derivácia záporná, a tak je funkcia na týchto dvoch intervaloch klesajúca. Na $(-1,1)$ je funkcia rastúca.

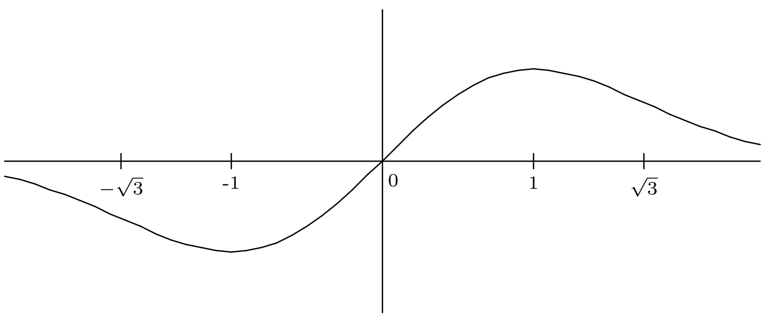
Konvexnosť a konkávnosť: $y'' = e^{-\frac{x^2}{2}}((-x)(1-x^2)-2x) = e^{-\frac{x^2}{2}}x(x^2-3)$.

Na nasledujúcich intervaloch $(-\infty,-\sqrt{3}), (-\sqrt{3},0), (0,\sqrt{3}), (\sqrt{3},\infty)$ je funkcia porade konkávna, konvexná, konkávna, konvexná. Teda inflexné body sú $-\sqrt{3}$, 0 a $\sqrt{3}$.

Lokálne extrémy: Dosadením kandidátov na extrém(± 1) do druhej derivácie dostávame: $y''(-1) > 0$ a $y''(1) < 0$, a preto je v bode -1 lokálne minimum a v bode 1 zase lokálne maximum.

Asyptoty: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, čiže smernica asymptoty je 0. Posun $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$. Asymptotou je os x t.j. $y = 0$.

Graf:



3. Máme derivovať zloženú funkciu. Rozložíme si ju najprv na "vonkajšie" a "vnútorné" zložky. Pripominam, že $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ a skladanie zobrazení je asociatívne t.j. $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ a derivácia zloženej funkcie sa rovná: $(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, t.j. derivácia vonkajšej s argumentom vnútornej krát derivácia vnútornej zložky, pričom pod vnútornou zložkou sa rozumie (v hornom označení) funkcia f a vonkajšou zložkou je zase funkcia g. Mnemotechnická pomôcka: v zápise $g(f(x))$ je funkcia g "vonku" a funkcia f "vo vnútri".

$\arcsin^2\frac{1}{\mathrm{x}-1} = \left(\mathrm{x}^2 \circ \arcsin \mathrm{x} \circ \frac{1}{\mathrm{x}} \circ (\mathrm{x}-1)\right)(\mathrm{x})$, čo znamená, že na vypočítanie funkčnej hodnoty v bode x musíme najprv vypočítať $(x-1)$, potom prevrátenú hodnotu tohto výsledku$(\frac{1}{x})$, nato arkussínus z tejto prevrátenej hodnoty a nakoniec to celé umocniť na druhú. (Samozrejme predpokladáme, že sme v definičnom obore.) Posledný zápis funkcie možno znázorniť nasledovne:

$$x^2 \circ \left(\arcsin \circ \left(\frac{1}{\mathrm{x}} \circ (\mathrm{x}-1)\right)\right)(x)$$

Vidíme, že x^2 je vonkajšia funkcia a ten zvyšok $F := \left(\arcsin \circ \left(\frac{1}{\mathrm{x}} \circ (\mathrm{x}-1)\right)\right)(x)$ je vnútornou funkciou. Derivácia vonkajšej zložky je $2x$, preto pre deriváciu platí: $2x(F) \cdot F' = 2 \cdot F \cdot F'$. Ale funkcia F je opäť zloženou funkciou, ale s menším počtom zložení. Opakujeme predošlý postup na funkciu F. Tu nasleduje skrátená schéma výpočtov:

$\left(\arcsin^2\frac{1}{\mathrm{x}-1}\right)' = (F^2)' = 2 \cdot F \cdot F'$, kde $F = \arcsin\frac{1}{\mathrm{x}-1}$

$F' = (\arcsin \mathrm{U})' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{U}^2}} \cdot \mathrm{U}'$, kde $U = \frac{1}{x-1}$

$U' = (\frac{1}{x-1})' = \left((x-1)^{-1}\right)' = -(x-1)^{-1-1} \cdot (x-1)' = -(x-1)^{-2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$

Keď sa to zloží dokopy, tak hľadaná derivácia je rovná: $-2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{x}-1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\mathrm{x}-1})^2}} \cdot \frac{1}{(\mathrm{x}-1)^2}$. Možno to ešte trochu upraviť, ale nejaké podstatné zjednodušenie sa nedosiahne.

4. Použije sa podobný postup ako v predošlom príklade.

$$\left(3^{\ln(x^2+x+1)}\right)' = 3^{\ln(x^2+x+1)} \cdot \ln 3 \cdot \left(\ln(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)\right)' = 3^{\ln(x^2+x+1)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \cdot (x^2+x+1)' =$$
$$= 3^{\ln(x^2+x+1)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \cdot (2x+1) = 3^{\ln(x^2+x+1)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$