Riešenia 3. písomky:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{6-5\sin\varphi+\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} t=\sin\varphi & \varphi\mapsto t \\ \mathrm{d}t=\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi & \frac{\pi}{2}\mapsto 1 \\ \mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}t}{\cos\varphi} & 0\mapsto 0 \end{pmatrix} = \int_0^1 \frac{\cos\varphi\frac{\mathrm{d}t}{\cos\varphi}}{6-5\sin\varphi+\sin^2\varphi} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{6-5t+t^2}$

2. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u & v' \\ \mathrm{arctg}\,x & \frac{x}{(1+x^2)^2} \\ u' & v \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{-1}{2(1+x^2)} \end{pmatrix} = \frac{-\mathrm{arctg}\,x}{2(1+x^2)} - \int \frac{-1}{2(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{arctg}\,x}{2(1+x^2)} + \int \frac{\mathrm{d}x}{2(1+x^2)^2}$

Výpočet integrálu $v' \to v$:

$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \begin{pmatrix} t=x^2 \\ \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2x} \end{pmatrix} = \int \frac{x\frac{\mathrm{d}t}{2x}}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \begin{pmatrix} u=1+t \\ du=dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} =$
$\frac{1}{2}\int u^{-2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{2}u^{-1} + C = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(1+t)} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$

3. Najprv rozklad na parciálne zlomky. Hľadáme také konštanty A, B, C, aby platilo:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Po úprave na spoločného menovateľa dostávame:

$$\frac{A(x+2)^2+B(x+2)(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{(A+B)x^2+(4A+3B+C)x+(4A+2B+C)}{(x+1)(x+2)^2}.$$

Preto musia platiť nasledujúce rovnosti:

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & B & & & = & 0 \\ 4A & + & 3B & + & C & = & 1 \\ 4A & + & 2B & + & C & = & -1 \end{array}$$

Z prvej rovnice máme, že $A = -B$. Odčítaním tretej rovnice od druhej dostávame, že $B = 2$, preto $A = -2$ a dosadením do napr. druhej rovnice zistíme, že $C = 3$. Hľadaný rozklad na parciálne zlomky je:

$$\frac{-2}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$$

Keď sa vrátime k výpočtu integrálu, tak dostávame, že $\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x =$ $\int \frac{-2\mathrm{d}x}{x+1} + \int \frac{2\mathrm{d}x}{x+2} + \int \frac{3\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = -2\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{x+2} + C.$

4. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} t=\frac{1}{x} \\ \mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x=-x^2\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{1}{x^2}\cdot -x^2\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}t = \int \sin\frac{1}{x}\mathrm{d}t = \int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t + C =$ $-\cos\frac{1}{x} + C.$

5. $\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u & v' \\ \mathrm{e}^{2x} & \cos x \\ u' & v \\ 2\mathrm{e}^{2x} & \sin x \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\sin x - 2\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

$\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u & v' \\ \mathrm{e}^{2x} & \sin x \\ u' & v \\ 2\mathrm{e}^{2x} & -\cos x \end{pmatrix} = -\mathrm{e}^{2x}\cos x + 2\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$

Ak si označíme $c = \int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$ a $s = \int \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$, tak z prvej rovnice dostávame, že $c = \mathrm{e}^{2x}\sin x - 2s$ a z druhej rovnice dostávame, že $s = -\mathrm{e}^{2x}\cos x + 2c$. Preto po dosadení vyjadrenia s do c máme, že $c = \mathrm{e}^{2x}\sin x - 2(-\mathrm{e}^{2x}\cos x + 2c) = \mathrm{e}^{2x}(\sin x + 2\cos x) - 4c$. A tak $5c = \mathrm{e}^{2x}(\sin x + 2\cos x)$, z čoho už dostávame: $c = \mathrm{e}^{2x}(\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x)$ plus obligátne $+C$.