Riešenia štvrtej písomky - 4. skupina 1.ročník VHVS

Upozornenie: Postupy tu uvedené sú jedným, ale nie jediným spôsobom riešenia!!!

1. Použitím ekvivalentných úprav dostávame:

Vyňatie 5 z s_1 a 2 z r_2, výmena r_1 a r_2, (-1)×x_1+x_2, $1 \times x_1 + x_3$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 10 \\ -1 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$ Urobíme rozvoj podľa s_1.

$$= -10 \cdot 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$ Ďalej už možno použiť Sarrusovo pravidlo, alebo pokračovať ďalej v eliminácii.

a) Sarrusovo pravidlo: $-10 \cdot [2 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1 + (-1) \cdot 7 \cdot (-1) - (-1) \cdot 7 \cdot 1 - 10 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 7 = 14 + 30 + 7 + 7 + 20 - 21] = -10 \cdot 57 = -570$.

b) Ďalšie eliminácie: $-3 \times r_1 + r_2, -2 \times r_3 + r_1, -1 \times r_3 + r_2$.

$$= -10 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 13 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 13 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$ Rozvoj podľa s_1.

$$= -10 \cdot 1 \cdot (-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = -10 \cdot [5 \cdot 12 - (-1) \cdot (-3)] = -10 \cdot (60 - 3) = -10 \cdot 57 = -570.$$

2. Aplikujeme nasledujúce úpravy:

$$(-1) \times r_1 + r_4, (-1) \times r_5 + r_4, (-1) \times r_5 + r_1, (-1) \times s_1 + s_3, (-1) \times s_1 + s_4$$

$$h \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Upravili sme maticu na dolnú trojuholníkovú.

Má lineárne nezávislé stĺpce, preto sa jej hodnosť rovná 4.

3. Zostavíme si maticu sústavy: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 3 & -1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Eliminujeme neznámu x_4 pomocou posledného riadku t.j. $1 \times r_5 + r_3, 1 \times r_5 + r2, (-1) \times r_5 + r_1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 3 & -1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 3 & -1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Vymeníme r_1, r_2 a pomocou r_1 eliminujeme prvky v prvom stĺpci, t.j. $-4 \times r_1 + r_2, -3 \times r_1 + r_3, -2 \times r_1 + r_4$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 15 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Vymeníme riadky r_2, r_3 a pomocou riadku r_2 eliminujeme zvyšné riadky pod ním t.j. $2{\times}r_2{+}r_3, 1{\times}r_2{+}r_5$.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right) \text{ Výmena } r_3, r_4 + \text{eliminácia:}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

Výmena r_4, r_5, vydelenie r_5 číslom (-31), eliminácia posledného stĺpca pomocou r_5.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Vidíme, že $x_5 = 1, x_4 = 0, x_3 = -2$. Elimináciou prvkov v 3. stĺpci pomocou 3. riadku t.j. $2 \times r_3 + r_2, (-1) \times r_3 + r_1$ dostávame:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \text{ t.j. } (3, 0, -2, 0, 1) \text{ je riešenie sústavy.}$$

4. Použitím napr. Sarrusovho pravidla dostávame, že matica $B := \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ je regulárna, preto na vyriešenie úlohy stačí nájsť k nej inverznú maticu B^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{3} & 2 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Operácie: $(-1) \times r_1 + r_2; (-2) \times r_2 + r_1, (-1) \times r_2 + r_3; r_1 \leftrightarrow r_2; (-1) \times r_2 + r_3; (-1) \times r_3 + r_2, (-1) \times r_3 + r_1; \frac{1}{3} \times r_2; (-2) \times r_2 + r_1$.

Preto sa $B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ a $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$.

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -19 & 12 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$