WAS IST $L_0(R)$?

CHRISTOPH WINGES

Zusammenfassung. Definition der L-Gruppen eines Rings mit Involution in geraden Graden und Berechnung von $L_{2n}(\mathbb{Z})$. Ausarbeitung zu einem Vortrag im „Was ist...?" - Seminar bei Prof. Dr. Arthur Bartels und Dr. Tibor Macko im WS 2009/10 an der WWU Münster, gehalten am 07.12.2009.

Definition. Sei R ein assoziativer Ring mit 1. Eine *Involution* auf R ist eine Abbildung $\overline{}\colon R \to R$ mit

$$\overline{r+s} = \overline{r} + \overline{s} \qquad \overline{rs} = \overline{s} \cdot \overline{r} \qquad \overline{\overline{r}} = r \qquad \overline{1} = 1$$

Beispiel.
- Jeder komm. Ring R besitzt die triviale Involution $\overline{} = \mathrm{id}_R$.
- $\mathbb{C}$ mit komplexer Konjugation ist ein Ring mit Involution.
- In der Anwendung betrachtet man typischerweise folgenden Fall:
  Gegeben eine Gruppe G und einen Homomorphismus $w\colon G \to \{\pm 1\}$, kann der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ vermöge
  $$\overline{\sum_{g \in G} n_g \cdot g} = \sum_{g \in G} w(g) n_g \cdot g^{-1}$$
  mit einer Involution versehen werden.

Sei im Folgenden R stets ein Ring mit Involution.

Bemerkung. Die Involution auf R erlaubt es, aus jedem Links-R-Modul M einen Rechts-R-Modul zu machen (und umgekehrt): Definiere $m \cdot r := \overline{r} \cdot m$ für $m \in M$, $r \in R$.
Insbesondere trägt somit jeder R-Modul automatisch eine R-R-Bimodulstruktur. Insbesondere ist für zwei R-Moduln M, N die abelsche Gruppe $\hom_R(M,N)$ wieder ein R-Modul.

Definition. Sei M ein endlich erzeugter freier R-Modul. Definiere die *Transpositionsabbildung*

$$\begin{aligned} T\colon \hom_R(M, M^*) &\to \hom_E(M, M^*) \\ \varphi &\mapsto \big[x \mapsto (y \mapsto \overline{\varphi(y)(x)})\big] \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Die *Strukturgruppen* von M sind gegeben durch die kurze exakte Folge

$$0 \to Q^\varepsilon(M) \to \hom_R(M, M^*) \xrightarrow{1-\varepsilon T} \hom_R(M, M^*) \to Q_\varepsilon(M) \to 0$$

Ein Paar $(M, \varphi \in Q^\varepsilon(M))$ heißt *ε-symmetrische Form* über R.
Ein Paar $(M, [\psi] \in Q_\varepsilon(M))$ heißt *ε-quadratische Form* über R.
Die *Symmetrisierung* einer ε-quadratischen Form $(M, [\psi])$ ist gegeben durch die ε-symmetrische Form $(M, \psi + \varepsilon T\psi \in Q^\varepsilon(M))$.

Eine ε-symmetrische Form (M,φ) heißt *nicht-singulär*, falls $\varphi\colon M \to M^*$ ein Isomorphismus ist. Eine ε-quadratische Form $(M,[\psi])$ heißt *nicht-singulär*, falls ihre Symmetrisierung nicht-singulär ist.

Bemerkung. Sei $(M,[\psi])$ eine ε-quadratische Form. Das Element $[\psi] \in Q_\varepsilon(M)$ kodiert ein Paar (λ,μ) folgender Form:
λ ist eine ε-symmetrische Form über R, gegeben durch die Symmetrisierung $\psi+\varepsilon T\psi$ von $[\psi]$.
μ ist eine Abbildung $\mu\colon M \to R/\{r-\varepsilon\overline{r} | r \in R\}$, gegeben durch $\mu(x) := \psi(x)(x)$. Diese Abbildung hat unter Anderem die Eigenschaft, dass $\mu(r\cdot x) = r\cdot\mu(x)\cdot\overline{r}$, und entspricht damit eher dem, was man intuitiv als „quadratische Form“ bezeichnen würde.
In der Tat ist die hier gegebene Formulierung zu der in Form von solchen Paaren (λ,μ) äquivalent (Laut [3] in [4] gezeigt).

Lemma 1. *Ist $\frac{1}{2} \in R$, so ist $1+\varepsilon T\colon Q_\varepsilon(M) \to Q^\varepsilon(M)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Abbildung $Q^\varepsilon(M) \to Q_\varepsilon(M)$, $\varphi \mapsto [\frac{1}{2}\cdot\varphi]$ ist eine explizite Inverse:

- $(1+\varepsilon T)[\frac{1}{2}\cdot\varphi] = \frac{1}{2}\cdot\varphi + \varepsilon\cdot\frac{1}{2}\cdot T\varphi = \frac{1}{2}\cdot\varphi + \frac{1}{2}\cdot\varphi = \varphi$
- $[\frac{1}{2}\cdot(\psi+\varepsilon T\psi)] = \frac{1}{2}\cdot([\psi]+[\varepsilon T\psi]) = \frac{1}{2}\cdot([\psi]+[\psi]) = [\psi]$

$\square$

Definition. Ein *(Iso)morphismus* ε-symmetrischer Formen $f\colon (M,\varphi) \to (M',\varphi')$ ist eine R-lineare (bijektive) Abbildung $f\colon M \to M'$ mit $f^*\circ\varphi'\circ f = \varphi$.
Ein *(Iso)morphismus* ε-quadratischer Formen $f\colon (M,[\psi]) \to (M',[\psi'])$ ist eine R-lineare (bijektive) Abbildung $f\colon M \to M'$ mit $[f^*\circ\psi'\circ f] = [\psi]$.

Definition. Die *standardhyperbolische* ε-quadratische Form ist gegeben durch

$$H_\varepsilon(M) := \Big(M\oplus M^*, \Big[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big] \in Q_\varepsilon(M)\Big)$$

Die *standardhyperbolische* ε-symmetrische Form ist definiert als

$$H^\varepsilon(M) := (1+\varepsilon T)H_\varepsilon(M) = \Big(M\oplus M^*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \in Q^\varepsilon(M)\Big)$$

Definiere nun

$$L_{2n}(R) := \Big(\{\text{nicht-singuläre } (-1)^n\text{-quadratische Formen über } R\}/\sim\ ,\ \oplus\Big)$$

wobei $(M,[\psi]) \sim (M',[\psi']) :\Leftrightarrow (M,[\psi])\oplus H_\varepsilon(N) \cong (M',[\psi'])\oplus H_\varepsilon(N')$ für gewisse endlich erzeugte freie R-Moduln N, N'.

Proposition 2. *$L_{2n}(R)$ ist eine abelsche Gruppe.*

Beweis. Wohldefiniertheit, Kommutativität und Assoziativität von $\oplus$ sind offensichtlich, das neutrale Element ist durch $[H_\varepsilon(R)]$ gegeben. Zur Existenz von Inversen:

Definition. Sei $(M,[\psi])$ eine ε-quadratische Form, $L \leqslant M$ ein Untermodul, $i\colon L \hookrightarrow M$ die kanonische Inklusion.
L heißt *lagrangesch*, falls L ein direkter Summand in M ist und folgende Folge kurz exakt ist:

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{i^*(\psi+\varepsilon T\psi)} L^* \to 0$$

Lemma 3. *Besitzt eine nicht-singuläre ε-quadratische Form $(M,[\psi])$ einen lagrangeschen Untermodul L, so gilt $(M,[\psi]) \cong H_\varepsilon(L)$.*

Aus dem Lemma folgt unmittelbar die Existenz von Inversen, denn $(M,[\psi]) \oplus (M,-[\psi]) = (M\oplus M, \begin{pmatrix} [\psi] & 0 \\ 0 & -[\psi] \end{pmatrix})$ besitzt in Form von $\Delta(M)$ einen lagrangeschen Untermodul:
$\Delta(M)$ ist ein direkter Summand in M. Betrachte die Folge

$$0 \to \Delta(M) \xrightarrow{i} M \oplus M \xrightarrow{i^*\begin{pmatrix} \psi+\varepsilon T\psi & 0 \\ 0 & -\psi-\varepsilon T\psi \end{pmatrix}} \Delta(M)^* \to 0$$

Exaktheit bei $\Delta(M)$ ist klar.
Da $\begin{pmatrix} [\psi] & 0 \\ 0 & -[\psi] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = 0$, ist auch $i^*\begin{pmatrix} \psi+\varepsilon T\psi & 0 \\ 0 & -\psi-\varepsilon T\psi \end{pmatrix} i = 0$.
Gilt andererseits $(\psi+\varepsilon T\psi)(x)(z)-(\psi+\varepsilon T\psi)(y)(z) = 0$ für alle $z \in M$, so folgt aus der Nicht-Singularität von $(M,[\psi])$, dass $x = y$. Dies zeigt Exaktheit bei $M \oplus M$.
Sei $\varphi \in \Delta(M)^* \cong M^*$ beliebig. Wähle $x \in M$ mit $(\psi+\varepsilon T\psi)(x) = \varphi \in M^*$. Dann ist $(x,0) \in M\oplus M$ ein Urbild von $\varphi \in \Delta(M)^*$, also ist die Folge auch an der letzten Stelle exakt.

Beweis von Lemma 3. Da L lagrangesch, ist

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{i^*(\psi+\varepsilon T\psi)} L^* \to 0$$

exakt und spaltet, da L projektiv. Sei $s\colon L^* \to M$ ein Spalt. Setze $t := -\varepsilon s^*\psi s$ und $s' := s+it\colon L^* \to M$ (Bemerke, dass s' weiterhin ein Spalt ist). Die Abbildung $\begin{pmatrix} i & s' \end{pmatrix} : L \oplus L^* \to M$ ist ein Isomorphismus. Damit diese Abbildung auch ein Isomorphismus von Formen ist, muss folgendes Diagramm bis auf ein Element in $\mathrm{img}(1-\varepsilon T)$ (d.h. in $Q_\varepsilon(M)$) kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} L \oplus L^* & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i & s' \end{pmatrix}} & M \\ {\scriptstyle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ L^* \oplus L & \xleftarrow{i^* \oplus s'^*} & M^* \end{array}$$

Dazu berechnen wir zunächst in $Q_\varepsilon(L^*)$

$$\begin{aligned} (s+it)^*\psi(s+it) &= s^*\psi s + s^*\psi it + t^*i^*\psi s + t^*i^*\psi it \\ &= s^*\psi s + t^*i^*\varepsilon T\psi s + t^*i^*\psi s \\ &= s^*\psi s + t^* \end{aligned}$$

womit folgt, dass

$$\begin{pmatrix} i^*\psi i & i^*\psi s' \\ s'^*\psi i & s'^*\psi s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon i^*T\psi s' \\ s'^*\psi i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{img}(1-\varepsilon T)$$

□

□

Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{Z}$ mit trivialer Involution.

Satz 4. *Es gilt:*

(1) $L_{4n}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$
(2) $L_{4n+2}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$

Der Beweis benötigt einige Vorbereitungen.

Definition. Eine ε-symmetrische Form heißt *gerade*, falls sie im Bild der Symmetrisierungsabbildung $1 + \varepsilon T$ liegt.

Bemerkung. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ und $\varepsilon = 1$ bedeutet dies für eine symmetrische Form (M, φ) nichts Anderes, als dass $\varphi(x)(x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in M$.

Lemma 5. *Es gilt:*

(1) *Jede nicht-singuläre* (-1)*-symmetrische Form über* $\mathbb{Z}$ *ist hyperbolisch.*
(2) $1 + T\colon Q_1(\mathbb{Z}^k) \to \operatorname{img}(1 + T) \subseteq Q^1(\mathbb{Z}^k)$ *ist bijektiv.*

Beweis. (1) Sei $\varphi\colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^{k^*} \in Q^{-1}(\mathbb{Z}^k)$ ein Isomorphismus. Wähle eine Basis $e_1, \ldots, e_k$ von $\mathbb{Z}^k$. Bezeichne $e_1^*, \ldots, e_k^*$ die dazu duale Basis.

Setze $x := \varphi^{-1}(e_1^*)$. Dann gilt $\varphi(e_1)(e_1) = 0$, $\varphi(x)(x) = 0$, $\varphi(x)(e_1) = 1$ und $\varphi(e_1)(x) = -1$, d.h. e_1 und x spannen eine hyperbolische Ebene auf. Damit $(\mathbb{Z}^k, \varphi) \cong H^{-1}(\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}^{k-2}, \varphi')$ (zur Existenz dieses Spalts siehe 3.1 in [2]).

Die Behauptung folgt nun per Induktion.

(2) Sei $[\varphi] \in \ker(1 + T)$, d.h. φ ist (-1)-symmetrisch. Zerlege $\varphi = \varphi' \oplus 0$, wobei 0 den Entartungsraum von φ bezeichne. φ' ist dann nicht-singulär und damit nach der eben bewiesenen Behauptung hyperbolisch.

Also $\varphi \cong H^{-1}(\mathbb{Z}^l) \oplus 0 \in \operatorname{img}(1 - T)$, d.h. die Symmetrisierungsabbildung ist injektiv.

□

Das vorangegangene Lemma besagt, dass wir uns zur Bestimmung von $L_{4n}(\mathbb{Z})$ auf das Studium gerader symmetrischer Formen über $\mathbb{Z}$ beschränken können.

Definition. Sei (M, φ) eine symmetrische Form über $\mathbb{Z}$. Definiere die *Signatur* durch

$$\sigma(M, \varphi) := \sigma(M \otimes \mathbb{R}, \varphi \otimes \mathbb{R}) = (\#\text{pos. Eigenwerte - } \#\text{neg. Eigenwerte}) \in \mathbb{Z}$$

Satz 6. *Sei* (M, φ) *eine nicht-singuläre symmetrische Form mit* $\sigma(M, \varphi) \neq \pm \operatorname{rk}(M)$*, die nicht gerade ist. Dann gilt*

$$(M, \varphi) \cong \big(\oplus_{i=1}^{s} (\mathbb{Z}, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) \big) \oplus \big(\oplus_{j=1}^{t} (\mathbb{Z}, -\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) \big)$$

Beweis. Dies ist Satz 4.3 in [2]. □

Lemma 7. *Für alle geraden, nicht singulären symmetrischen Formen* (M, φ) *über* $\mathbb{Z}$ *gilt* $\sigma(M, \varphi) \in 8\mathbb{Z}$.

Beweis. Sei (M, φ) zunächst eine beliebige nicht-singuläre symmetrische Form. Für die nach $\mathbb{Z}_2$ induzierte Form gilt

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{x} + \dot{y})(\dot{x} + \dot{y}) &= (\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{x})(\dot{x}) + (\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{x})(\dot{y}) \\ &\quad + (\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{y})(\dot{x}) + (\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{y})(\dot{y}) \\ &= (\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{x})(\dot{x}) + (\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{y})(\dot{y})\end{aligned}$$

wobei $\dot{x}$ die Restklasse von x bezeichne. Ist Δ die Inklusion der Diagonalen, gilt also $(\varphi \otimes \mathbb{Z}_2) \circ \Delta \in \mathbb{Z}_2^{k^*}$. Da $\varphi \otimes \mathbb{Z}_2 \colon \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^{k^*}$ ein Isomorphismus ist, existiert ein $\dot{u} \in \mathbb{Z}_2^k$ mit

$$(\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{u})(\dot{x}) = (\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{x})(\dot{x})$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\varphi(u+2v)(u+2v) &= \varphi(u)(u) + \varphi(u)(2v) + \varphi(2v)(u) + \varphi(2v)(2v) \\ &= \varphi(u)(u) + 4 \cdot \varphi(u)(v) + 4 \cdot \varphi(v)(v) \\ &= \varphi(u)(u) + 4 \cdot (\varphi(v)(v) + 2z) + 4 \cdot \varphi(v)(v) \\ &= \varphi(u)(u) + 8 \cdot (\varphi(v)(v) + z)\end{aligned}$$

Damit ist $\widetilde{\sigma}(M,\varphi) := \varphi(u)(u) \in \mathbb{Z}_8$ wohldefiniert. Falls (M,φ) gerade ist, gilt $\widetilde{\sigma}(M,\varphi) = 0$, denn aus $\varphi(x)(x) \in 2\mathbb{Z}$ folgt $(\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(\dot{x})(\dot{x}) = 0 = (\varphi \otimes \mathbb{Z}_2)(0)(\dot{x})$.
Um den Beweis abzuschließen, genügt es also zu zeigen, dass σ und $\widetilde{\sigma}$ modulo 8 übereinstimmen.
Man rechnet leicht nach, dass σ und $\widetilde{\sigma}$ sich additiv bezüglich $\oplus$ verhalten und auf $(\mathbb{Z}, \pm\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$ modulo 8 übereinstimmen.
Sei nun (M,φ) wieder beliebig. Die Form $(M',\varphi') := (M,\varphi) \oplus (\mathbb{Z}, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) \oplus (\mathbb{Z}, -\,\mathrm{id}_Z)$ ist nicht gerade und hat Signatur $\sigma(M',\varphi') = \sigma(M,\varphi) \neq \pm\,\mathrm{rk}(M')$.
Nach Satz 6 gilt also $(M',\varphi') \cong \big(\oplus_{i=1}^s (\mathbb{Z}, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})\big) \oplus \big(\oplus_{j=1}^t (\mathbb{Z}, -\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})\big)$, woraus mit Hilfe der Additivität von σ und $\widetilde{\sigma}$ die Behauptung folgt. □

Beweis von Satz 4.

(1) Da $\sigma(H^1(\mathbb{Z}^k)) = 0$, induziert σ nach Lemma 7 einen Homomorphismus $\sigma \colon L_{4n}(\mathbb{Z}) \to 8\mathbb{Z}$. Die symmetrische Form $(\mathbb{Z}^8, E_8)$, gegeben durch

$$E_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist eine gerade Form mit $\sigma(\mathbb{Z}^8, E_8) = 8$, also ist σ surjektiv.

Ist (M,φ) eine nicht-singuläre gerade symmetrische Form mit $\sigma(M,\varphi) = 0$, so existiert ein $x \in M$, $x \neq 0$ mit $\varphi(x)(x) = 0$. Analog zu Lemma 5 folgt induktiv, dass (M,φ) hyperbolisch ist.

(2) Wir geben nur eine Skizze des Beweises. Betrachte zunächst $L_2(\mathbb{Z}_2)$.

Für ein beliebiges Element $[\psi] \in Q_1(\mathbb{Z}_2^k)$ ist $\psi + T\psi$ symmetrisch und man zeigt wie in Lemma 5, dass $\psi + T\psi$ hyperbolisch ist. Wähle eine symplektische Basis $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l$ $(k = 2l)$. Definiere dann die *Arf-Invariante*

$$\mathrm{Arf}(\psi) := \sum_{i=1}^{l} \psi(x_i)(x_i) \cdot \psi(y_i)(y_i) \in \mathbb{Z}_2$$

Satz 8. *Die Arf-Invariante einer quadratischen Form über $\mathbb{Z}_2$ ist wohldefiniert; zwei quadratische Formen über $\mathbb{Z}_2$ sind genau dann isomorph, wenn ihre Ränge und Arf-Invarianten übereinstimmen.*

Beweis. Dies ist Satz III.1.2 in [1]. □

Die Arf-Invariante verhält sich additiv bezüglich $\oplus$, zudem gilt $\mathrm{Arf}(H_1(\mathbb{Z}_2)) = 0$. Somit induziert Arf einen Isomorphismus

$$\mathrm{Arf}\colon L_2(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_2$$

Damit genügt es zu zeigen, dass der durch $- \otimes \mathbb{Z}_2$ induzierte Ringwechselhomomorphismus $L_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{Z}_2)$ ein Isomorphismus ist. Dazu kann man auf Bemerkung zurückgreifen. Dekodiert man ein $[\psi] \in Q_{-1}(\mathbb{Z}^k)$ in ein Paar (λ, μ), so ist λ nach Lemma 5 hyperbolisch, trägt also keine zusätzliche Information, während es sich bei μ bereits um eine Abbildung $\mu\colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}_2$ handelt. Hieraus folgt die Behauptung.

□

Literatur

[1] W. Browder. *Surgery on Simply-Connected Manifolds*. Springer Verlag, 1972.

[2] D. Husemoller and J. Milnor. *Symmetric Bilinear Forms*. Springer Verlag, 1973.

[3] A. Ranicki. The algebraic theory of surgery I. Foundations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 40:87–192, 1980.

[4] C.T.C. Wall. On the axiomatic foundations of the theory of Hermitian forms. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 67:243–50, 1970.