Die Pontryagin-Thom-Konstruktion

Daniel Kasprowski

Ausarbeitung zum Seminarvortrag über die Pontryagin-Thom-Konstruktion im Seminar "Was ist...?" bei Arthur Bartels, gehalten am 30.11.2009 an der WWU Münster.

Sei im folgendem M geschlossene m-Mfk.

1 Erinnerung (Satz von Sard)

Ist $f : M \to N$ eine diffb. Abb. zw. diffb. Mfk., dann ist die Menge der krit. Werte eine Lebesgue Nullmenge.

2 Definition

Sei N geschl. n-dim. Untermfk. von M.
Ein Rahmen der Untermfk $N \subseteq M$ ist eine stetige Funktion v die jedem $x \in N$ eine Basis $v(x) = (v^1(x), .., v^{m-n}(x))$ von $TN_x^\perp \subseteq TM_x$ von Normalenvektoren zu N in M bei x zuordnet.
Das Paar (N, v) ist eine gerahmte Untermfk. von M.

3 Definition

Seien N, N' geschl. n-dim. Untermfk. von M. N ist kobordant zu N' in M, falls die Teilmenge $N \times [0, \epsilon) \cup N' \times (\epsilon, 1] \subseteq M \times [0, 1]$ zu einer kp. Mfk $X \subseteq M \times [0, 1]$ erweitert werden kann, so dass $\partial X = N \times \{0\} \cup N' \times \{1\}$ ist und X $M \times \{0, 1\}$ ansonsten nicht schneidet.
Zwei gerahmte Untermfk. $(N, v), (N', w)$ sind gerahmt kobordant, wenn es einen Kobordismus $X \subseteq M \times [0, 1]$ zwischen N und N' gibt und einen Rahmen u von X, so dass

$$\begin{aligned} u^i(x,t) &= (v^i(x), 0) \text{ für } (x,t) \in N \times [0,\epsilon) \\ u^i(x,t) &= (w^i(x), 0) \text{ für } (x,t) \in N' \times (\epsilon, 1] \end{aligned}$$

Kobordismus und gerahmter Kobordismus sind Äquiv.rel.

4 Erinnerung

Sei $f : M \to S^p$ eine diffb. Abb. $y \in S^p$ ein regulärer Wert, $p \geq 1$. Für jedes $x \in f^{-1}(y)$ bildet die Abb. $df_x : TM_x \to T(S^p)_y$ den Unterraum $Tf^{-1}(y)_x$ auf Null ab und das orthogonale Komplement $Tf^{-1}(y)_x^\perp$ isomorph auf $T(S^p)_y$.
Beweis:

Betrachte

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(y) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\ y \arrow[r] & S^p \end{tikzcd}$$

Also wird $Tf^{-1}(y)_x$ auf Null abgebildet und der Iso folgt aus Dim.gründen.

5 Definition

In der Sit. der Erinnerung induziert f einen Rahmen der Mfk. $f^{-1}(y)$ wie folgt:
Wähle eine pos. or. Basis $v = (v^1, .., v^p)$ des Tangentialraums TS^p_y, dann ex. eind. $w^i(x) \in Tf^{-1}(y)^{\perp}_x \subseteq TM_x$ die unter df auf v^i abgebildet werden. Schreibe f^*v für den entstehenden Rahmen w^i.
Die gerahmte Mfk. $(f^{-1}(y), f^*v)$ heißt Pontryagin-Mfk. assoziert zu f.

6 Satz

Ist y' ein weiterer regulärer Wert von f und v' eine pos. or. Basis für $T(S^p)_y$, dann sind die gerahmten Mfk $(f^{-1}(y), f^*v)$ und $(f^{-1}(y'), f^*v')$ gerahmt kobordant.

7 Satz

Zwei Abb. von M nach S^p sind diffb. homotop gdw., die zugehörigen Pontryagin Mfk. gerahmt kobordant sind.

8 Satz

Jede kp. gerahmte Untermfk (N, v) von Kodimension p in M tritt als Pontryagin Mfk. für eine diffb. Abb. $f : M \to S^p$ auf.

Also gibt es eine Bijektion zw. $[M, S^p]$ und den gerahmten Kobordismusklassen gerahmter Untermfk. von M mit Kodimension p.

Der Beweis von Satz 6 basiert auf drei Lemmas:

9 Lemma

Wenn v, v' zwei versch. pos. or. Basen von TS^p_y sind, dann sind die Pontryagin Mfk. $(f^{-1}(y), f^*v)$ und $(f^{-1}(y), f^*v')$ gerahmt kobordant.
Beweis:
Wähle einen diffb. Weg von v zu v' im Raum aller pos. or. Basen für TS^p_y (dieser Raum kann mit $GL^+(p, \mathbb{R})$ aller Matrizen mit pos. Determinante identifiziert werden, ist also zusammenhängend). Solch ein Weg liefert den benötigten Rahmen des Kobordismus $f^{-1}(y) \times [0, 1]$.
Im folgenden wird daher nur noch von "der gerahmten Mfk $f^{-1}(y)$" gesprochen. $\square$

10 Lemma

Ist y ein regulärer Wert von f und z nahe genug bei y, dann ist $f^{-1}(z)$ gerahmt kobordant zu $f^{-1}(y)$.
Beweis:
Da die Menge der krit. Werte von f kp. ist, können wir ein $\epsilon > 0$ wählen, so dass die ϵ-Umgeb. von y nur reguläre Werte enthält. Gegeben ein z mit $||z - y|| < \epsilon$, wähle eine diffb. ein-Parameter Familie von Rotationen $r_t : S^p \to S^p$ so dass $r_1(y) = z$ und

(a) r_t ist die Identität für $0 \leq t \leq \epsilon'$

(b) $r_t = r_1$ für $1 - \epsilon' \leq t \leq 1$

(c) Jedes $r_t^{-1}(z)$ liegt auf dem Großkreis von y nach z und ist damit ein regulärer Wert von f.

Definiere die Homotopy $F : M \times [0,1] \to S^p$ durch $F(x,t) = r_t f(x)$. Für jedes t ist z ein regulärer Wert der Komposition $r_f \circ f$. Es folgt, dass z ein regulärer Wert von F ist. Damit ist $F^{-1}(z)$ ein gerahmter Kobordismus zwischen $f^{-1}(z)$ und $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$. □

11 Lemma

Sind f, g diffb. homotop und y ein regulärer Wert von beiden, dann ist $f^{-1}(y)$ gerahmt kobordant zu $g^{-1}(y)$
Beweis:
Wähle eine Homotopie F mit $F(x,t) = f(x)$ für $0 \leq t \leq \epsilon$ und $F(x,t) = g(t)$ für $1 - \epsilon \leq t \leq 1$ und einen regulären Wert z für F der nahe genug bei y ist, so dass $f^{-1}(z), g^{-1}(z)$ gerahmt kobordant zu $f^{-1}(y), g^{-1}(y)$ ist. Dann ist $F^{-1}(z)$ eine gerahmte Mfk und liefert einen gerahmten Kobordismus zwischen $f^{-1}(z)$ und $g^{-1}(z)$. □

Beweis von Satz 6:
Seien y, z reguläre Werte von f, dann wähle diffb. Rotationen $r_t : S^p \to S^p$, so dass $r_0 = id$ und $r_1(y) = z$, dann sind f und $r_1 \circ f$ diffb. homotop und damit ist $f^{-1}(z)$ gerahmt kobordant zu $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$. □

Der Beweis von Satz 8 basiert auf folgendem Satz

12 Satz (Produkt-Umgebung)

Sei $N \subseteq M$ eine gerahmte, geschl. Untermfk. mit Kodimension p und Rahmen v. Dann ex. eine Umgebung von N in M, die diffeomorph zu $N \times \mathbb{R}^p$ ist. Der Diffeo. kann so gewählt werden, das alle $x \in N$ auf $(x, 0) \in N \times \mathbb{R}^p$ abbgebildet wird und jeder Normalenvektor $v(x)$ auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^p$.
Beweis:
Zunächst sei $M = \mathbb{R}^{n+p}$. Betrachte die Abb. $g : N \times R^p \to M$, definiert durch $g(x, t_1, .., t_p) = x + \sum_i t_i v^i(x)$.
$dg(x, 0, .., 0)$ ist nicht singulär, damit bildet g eine Umgebung von $(x, 0) \in N \times \mathbb{R}^p$ diffeo. auf eine offene Menge ab.
Beh: g ist inj. auf der gesamten Umgebung $N \times U$ von $N \times 0$, wo U die ϵ-Umgeb. von 0 in $\mathbb{R}^p$ und $\epsilon > 0$

genügend klein.
Bew: Ansonsten gäbe es Paare $(x,u) \neq (x',u')$ in $N \times \mathbb{R}^p$ mit $||u||, ||u'||$ beliebig klein und $g(x,u) = g(x',u')$. Da N kp. ist, gibt es Folgen solcher Paare mit $x \to x_0$, $x' \to x'_0$ und $u, u' \to 0$. Dann gilt offensichtlich $x_0 = x'_0$, aber g ist inj. in einer kleinen Umgeb. von $(x_0, 0)$.
Damit bildet g $N \times U$ diffeo. auf eine offene Menge ab. Da $U \cong \mathbb{R}^n$ zeigt dies den Satz für $M = \mathbb{R}^{n+p}$.
Für allg. M muss man Geraden in $\mathbb{R}^{n+k}$ durch Geodäten ersetzen. d.h. sei $g(x, t_1, .., t_n)$ der Endpunkt des Geodätenstücks der Länge $||\sum_i t_i v^i(x)||$ in M, das in x mit Anfangsgeschwindikeitsvektor $\sum_i t_i v^i(x)/||\sum_i t_i v^i(x)||$ startet. Die Abb. $g : N \times U_\epsilon \to M$ ist wohldef. und diffb. für $\epsilon > 0$ klein genug. Der Rest des Beweis geht analog.

Beweis von Satz 8:
Sei N eine geschl., gerahmte Untermfk. von M. Wähle einen Diffeo. $g : N \times \mathbb{R}^p \to V \subseteq M$ einer Produktumgeb. V von N wie oben und definiere die Proj. $\pi : V \to \mathbb{R}^p$ durch $\pi(g(x,t)) = t$. 0 ist ein regulärer Wert und $\pi^{-1}(0)$ ist gerade (N, v). Wähle eine diffb. Abb. $\phi : \mathbb{R}^p \to S^p$ mit $\phi(x) = s_0$ für $||x|| \geq 1$ und so dass ϕ den offenen Einheitsball diffeo. auf $S^p - s_0$ abb.
Definiere $f : M \to S^p$ durch $f(x) = \phi(\pi(x))$ für $x \in V$ und $f(x) = s_0$ sonst. Dann ist f diffb. und $\phi(0)$ ist regulärer Wert von f und $f^{-1}(\phi(0)) = \pi^{-1}(0) = N$. □

Für Satz 7 benötigen wir:

13 Lemma

Seien $f, g : M \to S^p$ diffb. Abb. mit gemeinsamen regulären Wert y. Wenn $(f^{-1}(y), f^*v) = (g^{-1}(y), f^*v)$, dann sind f ung g homotop. (Dabei ist v wieder pos. or. Basis von TS^p_y)
Beweis:
Sei $N := f^{-1}(y)$.
Stimmen f, g schon auf einer Umgebung V von N überein, so sind f, g diffb. homotop über die Homotopie

$$F(x,t) = f(x) \; \forall x \in V \qquad F(x,t) = h^{-1}(th(f(x)) + (1-t)h(g(x))) \; \forall x \in M - N$$

Wobei $h : S^p - \{y\} \to \mathbb{R}^p$ die stereographische Proj.
Es genügt also f so abzuändern, dass es mit g in einer kleinen Umgebung von N übereinstimmt, ohne dabei neue Punkte nach y abzubilden. Wähle eine Produkt-Umgebung $N \times \mathbb{R}^p \to V \subseteq M$, wo V klein genug ist, so dass weder $f(V)$ noch $g(V)$ den antipodalen Punkt $\bar{y}$ von y enthalten. Identifiziert man V mit $N \times \mathbb{R}^p$ und $S^p - \{\bar{y}\}$ mit $\mathbb{R}^p$, wobei y mit 0 identifiziert wird, so erhält man Abb:

$$F, G : N \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$$

mit $F^{-1}(0) = G^{-1}(0) = N \times 0$.
Nun zeigen wir, dass es eine Konstante c gibt, so dass $F(x,u) \cdot u > 0$ und $G(x,u) \cdot u > 0$ für $x \in N$ und $0 < ||u|| < c$. D.h., dass die Homotopie $(1-t)F(x,u) - fG(X,u)$ zumindest für $||u|| < c$ keine neuen Punkte nach 0 schickt.
Die Taylor-Formel liefert $||F(x,u) - u|| \leq c_1||u||^2$ für $||u|| \leq 1$, also $|(F(x,u) - u)u| \leq c_1||u||^3$ und damit

$$F(x,u)u \geq ||u||^2 - c_1||u||^3 > 0$$

für $0 < ||u|| < min(c_1^{-1}, 1)$ und analog für G.
Um keine Punkte weit draußen zu verschieben, wähle eine diffb. Abb. $\lambda : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(u) = 1$ für

$||u|| \leq \frac{c}{2}$ und $\lambda(u) = 0$ für $||u|| \geq c$.
Die Homotopie $F_t(x,u) = [1-\lambda(u)t]F(x,u) + \lambda(u)tG(x,u)$ überführt $F = F_0$ in eine Abb. F_1 die mit G für $||u|| < \frac{c}{2}$ übereinstimmt, mit F für $||u|| \geq c$ und keine neuen Punkte nach 0 abb. Die gleiche Umformung mit f beweist das Lemma. $\square$

Beweis von Satz 7:
Sind f, g diffb. homotop dann liefert Lemma 11, dass die Pontryagin Mfk. $f^{-1}(y)$ und $g^{-1}(y)$ gerahmt kobordant sind.
Ist andersherum (X, w) ein gerahmter Kobordismus zwischen $f^{-1}(y)$ und $g^{-1}(y)$, dann gibt es analog zum Beweis von Satz 8 eine Homotopie $F : M \times [0,1] \to S^p$ dessen Pontryagin-Mfk $F^{-1}(y)$ gleich (X, w) ist. Setzt man $F_t(x) := F(x,t)$ so haben F_0 und f die gleiche Pontryagin-Mfk., also sind sie nach Lemma 13 homotop. Und analog $F_1 \sim g$, also $f \sim g$ $\square$

14 Definition

Sei N m-dim or. Mfk. ohne Rand und zusammenhängend. $f : M \to N$ diffb. Ist $x \in M$ ein regulärer Punkt, so ist df_x lin. Iso. zwischen or. VR. Sei $sign(df_x) = \pm 1$ jenachdem ob df_x die Or. erhält oder umkehrt. Sei $y \in N$ ein regulärer Wert, dann ist der Grad von f def. als $degf := \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(df_x)$. (Die Deg. ist unabhängig von der Wahl von y).
Im nichtorientierten Fall ist der mod 2-Grad def. als $\#f^{-1}(y)$ mod 2.

15 Korollar (Satz von Hopf)

Sei M noch zusammenhängend und orientiert. Dann sind zwei Abb. $M \to S^m$ diffb. homotop gdw. sie den gleichen Grad haben.
Beweis:
Eine gerahmt Untermfk. der Kodimension m ist eine endl. Menge von Punkten mit einer Basis in jedem Punkt. Sei $sgn(x) = \pm 1$ jenachdem, ob die Basis an x pos. oder neg. orientiert ist. $\sum sgn(x)$ ist gleich dem Grad der zugehörigen Abb.$M \to S^m$. Andererseits ist die gerahmte Kobordismusklasse einer 0-Mfk. eindeutig durch $\sum sgn(x)$ bestimmt. $\square$

16 Korollar

Sei M zusammenhängend,kp., ohne Rand aber nicht orientierbar, dann sind zwei Abb. $M \to S^m$ homotop gdw. sie den gleichen mod 2-Grad haben.
Beweis:
Da M nicht orientierbar ist, gibt es für $x \in M$ einen Weg in M, der eine Basis von TM_x in eine Basis der entgegengesetzten Or. überführt. Also sind je zwei Punkte gerahmt kobordant. $\square$

17 Korollar

Die Pontryagin-Thom-Konstruktion liefert einen Isomorphismus von $\pi_{n+p}(S^p, s_0)$ in die Gruppe der gerahmten Kobordismusklassen von gerahmten, kp., n-dim. Untermfk. des $\mathbb{R}^{n+p}$
Beweis:
Die gerahmten Kobordismusklassen von gerahmten, kp., n-dim. Untermfk. des $\mathbb{R}^{n+p}$ entsprechen 1-zu-1 denen von S^{n+p}, da wegen $p \geq 1$, die Untermfk. nicht ganz S^{n+p} sein können. D.h. die Pontryagin-Thom-Konstruktion liefert eine bij. Abb. zwischen obigen Mengen.
Die Abb. ist ein Homomorphismus, denn wählt man einen regulären Pkt $y \neq s_0$, so ist $(f+g)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \amalg g^{-1}(y)$

Literatur:

John W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princton University Press, 1997