Vortrag: Hyperbolische Gruppen

"Was ist...?" Seminar WS 09/10
Matthias Blank

17. Januar 2010

1 Geodätische Räume

Definition 1.1 (Geodäten)**.**

i) Sei im Folgenden stets (X, d) ein metrischer Raum. Eine Geodäte von $x \in X$ nach $y \in X$ ist eine Abbildung $c\colon [0, l] \to X$ mit

   1) $c(0) = x$, $c(l) = y$
   2) $d(c(t), c(t')) = |t - t'| \quad \forall\, t, t' \in [0, l]$

   Entsprechend definiert man geodätische Strahlen und geodätische Geraden. Schreibe auch $[x, y]$ für das Bild der Geodäte.

ii) Ein metrischer Raum (X, d) heißt geodätisch, falls zu $x, y \in X$ stets eine Geodäte von x nach y existiert. Er heißt eindeutig geodätisch, falls zu x, y stets genau eine solche Geodäte existiert.

Beispiel 1.2.

- $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, d_{Std})$ *ist ein (eindeutig) geodätischer Raum*
- $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ *ist nicht geodätisch*

Definition 1.3 (Hausdorff-Abstand)**.** Seien $A, B \subset (X, d)$ Teilmengen eines metrischen Raumes. Definiere ihren Hausdorff-Abstand

$$d_H(A, B) = d(A, B) = \inf\{\epsilon \in \mathbb{R} \mid A \subset U_\epsilon(B) \text{ und } B \subset U_\epsilon(A)\}$$

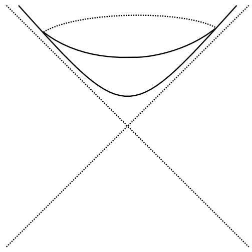
wobei $U_\epsilon(A)$ die ϵ-Umgebung von A ist (d.h. $U_\epsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)$)

Definition 1.4 (Hyperbolischer Raum, Modellräume)**.**

i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $<,>_H$ die zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \in Gl(n+1)$$

Abbildung 1: $\mathbb{H}^2$



gehörende symmetrische Bilinearform. Setze

$$H^n := \{u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R} \mid < u, u >_H = -1,\ u_{n+1} > 0\}$$

Dann existiert eine Metrik auf H^n mit

$$\cosh d(A,B) = - < A, B >_H \qquad \forall A, B \in H^n$$

ii) Sei $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_{\text{Std}})$, $\mathbb{S}^n = (S^n, d_{\text{Winkel}})$, $\mathbb{H}^n = (H^n, d)$ wie oben. Setze für $\kappa \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$

1) $M_k^n = \mathbb{E}^n$ für $\kappa = 0$
2) $M_k^n = (S^n, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} d_{\mathbb{S}^n})$ für $\kappa > 0$
3) $M_k^n = (H^n, \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} d_{\mathbb{H}^n})$ für $\kappa < 0$

Diese Räume sind geodätisch und heißen Modellräume.

Definition 1.5 (CAT(κ)-Raum)**.** Sei X ein metrischer Raum, $\kappa \in \mathbb{R}$. Sei Δ ein geodätisches Dreieck in X (mit Durchmesser $\leq 2D_\kappa$). Sei $\bar{\Delta} \subset M_\kappa^n$ ein Vergleichsdreieck in M_κ^n für Δ, d.h. ein geodätisches Dreieck dessen Seitenlängen mit denen von Δ übereinstimmen. Δ erfüllt die CAT(κ)-Bedingung falls für alle $x, y \in \Delta$ und alle Vergleichspunkte $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$(d.h. die Abstände von x (bzw. y) zu den Eckpunkten der Kante auf der x liegt sind gleich den entsprechenden Abständen von $\bar{x}$) gilt:

$$d(x,y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$$

Für $\kappa \leq 0$ heißt X CAT(κ)-Raum, falls X geodätisch ist und alle Dreiecke die CAT(κ)-Bedingung erfüllen.
Für $\kappa > 0$ heißt X CAT(κ)-Raum, falls X D_κ-geodätisch ist und alle geod. Dreiecke von Umfang kleiner gleich $2D_\kappa$ die CAT(κ)-Bedingung erfüllen.

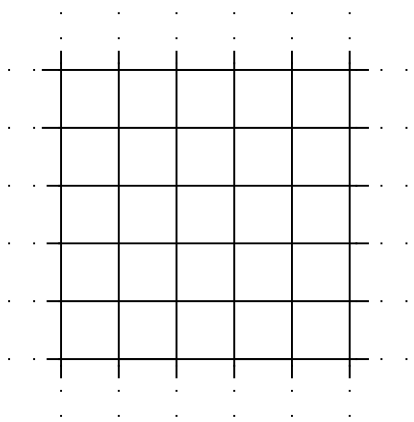
2 Geometrische Gruppentheorie

Betrachte im Folgenden stets endlich erzeugte Gruppen G

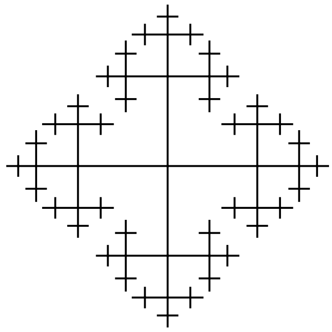
Ziel. *Mit geometrischen Methoden Eigenschaften der Gruppe verstehen.*

Definition 2.1 (Cayley-Graph, Bridson-Haefliger-Version)**.** Sei G eine Gruppe, A ein endliches Erzeugendensystem von G. Der Cayley-Graph $C_A(G)$ von G bezüglich A ist der metrische Graph mit Eckenmenge G der für jedes Paar $(\gamma, a) \in G \times A$ eine Kante der Länge 1 von γ nach γa besitzt (bezeichnet mit a).

Abbildung 2: Zwei Cayleygraphen



$(\mathbb{Z}; \{(1,0)(0,1)\})$



$(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}; \{x, y\})$

Beispiel 2.2. *Diese beiden Beispiele sind in gewisser Weise Archetypen verschiedener Geometrien. Mit deren Unterschied werden wir uns im folgenden befassen.*

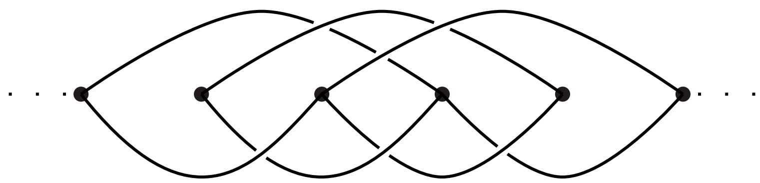
Frage: Wie lassen sich die geometrischen Eigenschaften der Graphen deuten?

Macht es zum Beispiel ohne weiteres Sinn von einfach zusammenhängenden Gruppen oder von CAT(2)-Gruppen zu sprechen? (Nein. I.A. existiert kein kanonisches endliches Erzeugendensystem, Geometrie hängt stark von der Wahl des Erzeugendensystems ab.)

Beispiel 2.3.

Abbildung 3: Der Cayleygraph hängt von dem Erzeugendensystem ab

$(\mathbb{Z}, \{1\})$



$(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$

Gesucht: Äquivalenzrelation von Graphen, die dies berücksichtigt. Dies führt zum Begriff der Quasi-Isometrie.

Definition 2.4 (Quasi-Isometrie)**.** Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume, $\lambda \geq 1$, $\epsilon \geq 0$. Eine (nicht notwendig stetige) Abbildung $f\colon X \to X'$ heißt (λ, ϵ)-Quasi-Isometrie, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

1) $\frac{1}{\lambda} d(x, y) - \epsilon \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \epsilon$

2) Es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $x' \in X'$ ein $x \in X$ existiert mit

$$d'(x', f(x)) < C$$

Wenn eine solche Abbildung existiert heißen X und X' quasi-isometrisch, schreibe dann auch $X \simeq_{QI} X'$. Eine Abbildung die 1) erfüllt heißt auch quasi-isometrische Einbettung.

Beispiel 2.5.

- *Beschränkte Räume sind quasi-isometrisch zum Ein-Punkt-Raum*
- *Die kanonische Inklusion* $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathbb{E}^2$ *ist eine* $(1, 0)$*-Quasi-Isometrie. Insbesondere* $\mathbb{Z}^2 \simeq_{QI} \mathbb{E}^2$

Satz 2.6. *Quasi-Isometrie ist eine Äquivalenzrelation. Genauer: Kompositionen von Quasi-Isometrien sind Quasi-Isometrien und es existieren "Quasi-Inverse".*

Beweis: Nachrechnen □

Satz 2.7. *Sei* Γ *eine Gruppe,* S *und* S' *endliche Erzeugendensysteme von* Γ*. Dann gilt für die zugehörigen Cayley-Graphen:*

$$C_S(\Gamma) \simeq_{QI} C_{S'}(\Gamma)(\simeq_{QI} (\Gamma, d^{S'}_{Wort}))$$

Beweis: $(\Gamma, d^{S'}_{\text{Wort}}) \simeq_{QI} (\Gamma, d^{S}_{\text{Wort}})$ sieht man, indem man die Elemente von S durch die von S' ausdrückt. $(\Gamma, d^{S}_{\text{Wort}}) \simeq_{QI} C_S(\Gamma)$ offensichtlich. □

Gesucht sind nun geometrische Eigenschaften einer Gruppen/ihres Graphens, die Quasi-Isometrie-Invarianten sind, an diese Stelle genauer ein Konzept das die globale Geometrie eines CAT(κ)-Raumes für $\kappa < 0$ wiedergibt.

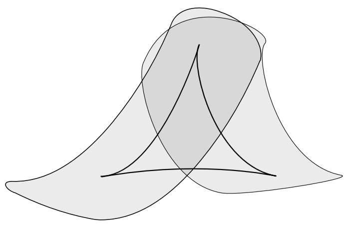
Bem. CAT(κ) zu sein ist keine Quasi-Isometrie-Invariante

3 Hyperbolische Räume

Definition 3.1.

i) Sei $\delta > 0$. Ein geodätisches Dreieck in einem metrischen Raum X heißt δ-dünn (δ-slim), falls jede der drei Seiten in einer δ-Umgebung der Vereinigung der anderen beiden Seiten enthalten ist.

Abbildung 4: δ-dünn



ii) Ein geod. Raum heißt δ-hyperbolisch oder einfach hyperbolisch, falls jedes geodätische Dreieck δ-dünn ist.

Proposition 3.2. *Für $\kappa < 0$ ist jeder CAT(κ)-Raum δ-hyperbolisch, und δ hängt nur von κ ab.*

Beweis: Betrachte zunächst den Modelraum $M_{-1}^2 = \mathbb{H}^2$. Nach Gauß-Bonnet für den hyperbolischen Raum gilt: Jedes Dreieck hat eine Fläche kleiner als π, die Fläche eines Kreises zum Radius r geht mit r gegen unendlich.
$\Rightarrow$ Es existiert ein $R > 0$, so dass für jeden in einem beliebigen Dreieck eingeschlossenen Halbkreis von Radius r gilt: $r < R \Rightarrow$ Jedes Dreieck ist $(R+1)$-dünn in $\mathbb{H}^2$.
Sei nun X beliebiger CAT(κ)-Raum, $\kappa < 0$, $\Delta \subset X$ ein geodätisches Dreieck. Betrachte ein Vergleichsdreieck $\bar{\Delta} \subset M_\kappa^2$. M_κ^2 ist $\delta(\kappa)$-hyperbolisch, denn $\mathbb{H}^2$ ist hyperbolisch und M_κ^2 entsteht aus $\mathbb{H}^2$ durch Skalieren der Metrik.
Sei $x \in \Delta$, $\bar{x}$ ein Vergleichspunkt auf einer Seite $\bar{a}$ des Vergleichsdreiecks. Wegen M_κ^2 hyperbolisch existiert ein $\bar{y} \in \bar{\Delta} - \bar{a}$ mit $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq \delta(\kappa)$. Sei $y \in \Delta - a$ so, dass $\bar{y}$ ein Vergleichspunkt zu y ist. Dann gilt

$$d(x,y) \overset{\mathrm{CAT}(\kappa)}{\leq} d(\bar{x}, \bar{y}) \leq \delta(\kappa)$$

$\Rightarrow \Delta$ ist $\delta(\kappa)$-dünn $\Rightarrow X$ ist $\delta(\kappa)$-hyperbolisch. □

Theorem 3.3 (Flache Ebene Theorem)**.** *Ein eigentlicher, kokompakter CAT(0)-Raum X ist genau dann hyperbolisch, wenn er keinen zu $\mathbb{E}^2$ isometrischen Teilraum besitzt.*

Beweis: "$\Rightarrow$" klar
"$\Leftarrow$" Siehe [BrHae99] (Benutzt visibility spaces) □

Proposition 3.4. *Sei X ein δ-hyperbolischer Raum, c eine stetige, rektifizierbare Kurve in X mit Endpunkten p und q. Sei $[p,q]$ eine geodätische Strecke von p nach q, dann gilt für alle $x \in [p,q]$*

$$d(x, \mathrm{im}(c)) \leq \delta\,|\log_2 l(c)| + 1$$

wobei $l(c)$ die Länge von c sei.

Beweis: Der Fall $l(c) \leq 1$ ist trivial. Sei also $l(c) > 1$ und ohne Einschränkung $c\colon [0,1] \to X$ linear parametrisiert. Sei $N \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$\frac{l(c)}{2^{N+1}} < 1 \leq \frac{l(c)}{2^N} \qquad \text{(existiert da } l(c) > 1\text{)}$$

Induktiv: Sei $\Delta_1 = \Delta([c(0), c(1/2)], [c(1/2), c(1)], [c(0), c(1)])$ ein geodätisches Dreieck in X das die gegebene Geodäte $[c(0), c(1)]$ enthält. Für $x \in [c(0), c(1)]$ wähle $y_1 \in [c(0), c(1/2)] \cup [c(1/2), c(1)]$ mit $d(x, y_1) < \delta$.
Falls $y_1 \in [c(0), c(1/2)]$, so betrachte $\Delta_2 := \Delta([c(0), c(1/4)], [c(1/4), c(1/2)], [c(0), c(1/2)])$, andernfalls betrachte $\Delta_2 := \Delta([c(1/2), c(3/4)], [c(3/4), c(1)], [c(1/2), c(1)])$, jeweils unter Verwendung der bereits gegeben Geodäten. In jedem Fall lässt sich analog zu oben auf einer der Seiten die nicht y_1 enthalten ein y_2 finden mit $d(y_1, y_2) < \delta$.
Induktiv erhält man so $y_1, \ldots, y_N$ mit $d(x, y_1) < \delta$, $d(y_n, y_{n+1}) < \delta$ für $n = 1, \ldots, N-1$ und y_N liegt auf einer Geodäte einer Länge kleiner gleich $l(c)/2^N$ mit Endpunkten auf $\mathrm{im}(c)$. Sei y der Endpunkt dieser Geodäte mit minimalem Abstand zu y_N, d.h

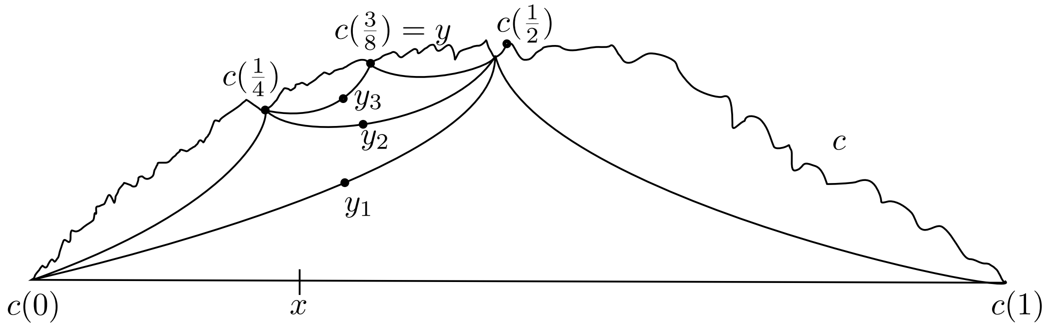
$$d(y, y_N) < \frac{l(c)}{2^{N+1}} < 1$$

Damit hat man ein $y \in \mathrm{im}(c)$ gefunden mit

$$d(x,y) \le \delta N + \frac{l(c)}{2^{N+1}} \le \delta N + 1 \le \delta\, |\log_2(l(c)| + 1$$
$$\left(\frac{l(c)}{2^N} \ge 1 \Rightarrow \log_2 l(c) - N \ge 0 \Rightarrow \log_2 l(c) \ge N\right)$$

□

Abbildung 5: Proposition 3.4



Als nächstes wollen wir zeigen, dass hyperbolisch tatsächlich eine Quasi-Isometrie-Invariante ist. Geodäten werden unter Quasi-Isometrien i.A. nicht erhalten, dies führt zu folgender Definition:

Definition 3.5 (Quasi-Geodäten)**.** Sei X ein metrischer Raum. Eine (λ, ϵ)-Quasi-Geodäte ist eine (λ, ϵ)-quasi-isometrische Einbettung $c\colon [a,b] \to X$, d.h. eine Abbildung $c\colon [a,b] \to X$ mit

$$\frac{1}{\lambda}\,|t - t'| - \epsilon \le d(c(t), c(t')) \le \lambda\,|t - t'| + \epsilon$$

Bem. In allgemeinen Räumen können Quasi-Geodäten sehr "wild" aussehen, nicht jedoch in hyperbolischen Räumen.

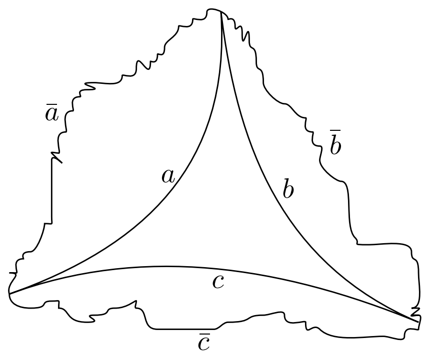
Theorem 3.6 (Stabilität von Quasi-Geodäten)**.** *Für jedes Tripel $\delta \ge 0, \lambda \ge 1, \epsilon \ge 0$ existiert eine Konstante $R = R(\delta, \lambda, \epsilon) \ge 0$ mit: Sei X ein δ-hyperbolischer Raum, c eine (λ, ϵ)-Quasi-Geodäte in X und $[c(0), c(1)]$ geodätische Strecke von $c(0)$ nach $c(1)$. Dann gilt:*

$$d([c(0), c(1)], \mathrm{im}(c)) \le R$$

Korollar 3.7. *Ein geodätischer metrischer Raum X ist genau dann hyperbolisch, wenn er für alle $\lambda \ge 1, \epsilon \ge 0$ (λ, ϵ)-quasi-hyperbolisch ist, in dem Sinne das für alle Paare λ, ϵ ein $M = M(\lambda, \epsilon) \in \mathbb{R}^+$ existiert mit: Alle (λ, ϵ)-quasi-geodätischen Dreiecke sind M-dünn (analog wie für geodätische Dreiecke).*

Beweis: "$\Leftarrow$" klar mit $\lambda = 1$, $\epsilon = 0$
"$\Rightarrow$" Sei X δ-hyperbolisch, $\lambda \ge 1, \epsilon \ge 0$. Dann existiert ein $R(\delta, \lambda, \epsilon)$ wie im Theorem. Sei $\tilde{\Delta}$ ein (λ, ϵ)-quasi-geodätisches Dreieck, Δ ein geodätisches Dreieck mit den selben

Abbildung 6: Korollar 3.7



Endpunkten. Seien a, b, c und $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ die jeweiligen Seiten. Nach Theorem 3.6 ist $\tilde{a} \subset U_R(a)$, wegen X δ-hyperbolisch ist $a \subset U_\delta(b \cup c)$

$$\stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\Rightarrow} \tilde{a} \subset U_{R+\delta}(b \cup c) \stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\Rightarrow} \tilde{a} \subset U_{2R+\delta}(\tilde{b} \cup \tilde{c})$$

□

Theorem 3.8. *Seien X, X' geodätische Räume, $f\colon X \to X'$ eine (λ, ϵ)-Quasi-Isometrie (oder allgemeiner eine (λ, ϵ)-quasi-isometrische Einbettung). Falls X' hyperbolisch ist, so auch X. Genauer: Ist X' δ-hyperbolisch, so ist X δ'-hyperbolisch und δ' hängt nur von δ, λ und ϵ ab*

Korollar 3.9. *Hyperbolisch ist eine Quasi-Isometrie-Invariante*

Beweis: [Thm. 3.8] Sei Δ ein geodätisches Dreieck in X. Dann ist $f(\Delta)$ ein (λ, ϵ)-quasi-geodätisches Dreieck in X'. Da X' δ-hyperbolisch ist existiert nach Kor.3.7 ein $M = M(\delta, \lambda, \epsilon)$, so dass $f(\Delta)$ M-dünn ist, d.h.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in a \text{ existiert ein } y \in b \cup c \text{ mit } d(f(x), f(y)) \leq M \\
&\Rightarrow d(x, y) \leq \lambda M + \lambda\epsilon \\
&\Rightarrow X \text{ ist } (\lambda\epsilon + \lambda M(\delta, \lambda, \epsilon))\text{-hyperbolisch}
\end{aligned}$$

□

Für den Beweis von Theorem 3.6 benötigen wir noch ein technisches Lemma:

Lemma 3.10 (gezähmte Quasi-Geodäten)**.** *Sei X ein geod. Raum, $c\colon [a, b] \to X$ eine (λ, ϵ)-Quasi-Geodäte. Dann existiert eine stetige, rektifizierbare (λ, ϵ')-Quasi-Geodäte $c'\colon [a, b] \to X$, so dass gilt*

i) $c'(a) = c(a),\ c'(b) = c(b)$

ii) $\epsilon' = 2(\lambda + \epsilon)$

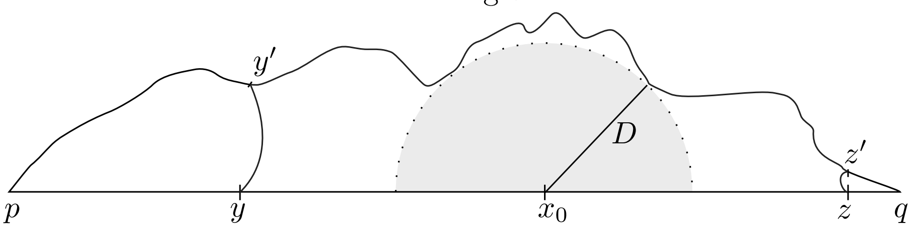
iii) $l(c'|_{[t,t']}) \leq k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2 \quad \forall t, t' \in [a, b]$ *mit* $k_1 = \lambda(\lambda + \epsilon), k_2 = (\lambda\epsilon' + 3)(\lambda + \epsilon)$

iv) $d(\mathrm{im}(c), \mathrm{im}(c')) \leq \lambda + \epsilon$

Beweis: Definiere c' durch Zusammensetzen von Geodäten $[a_k, a_{k+1}]$ wobei $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a, b\} \cup (\mathbb{Z} \cap]a, b[)$ und die Indizierung enstpreche der offensichtlichen Anordnung der Punkte in $[a, b]$. Dann nachrechnen, dass c' die Eigenschaften erfüllt. □

Beweis: [Thm.3.6] Man zähme zunächst c, d.h. man ersetzte c durch c' wie in obigem Lemma. Sei $[p, q]$ ein geod. Segment zwischen den Endpunkten von c'. Sei $D = \sup\{d(x, \mathrm{im}(c')) \mid x \in [p, q]\}$ und $x_0 \in [p, q]$ ein Punkt an dem das Supremum angenommen wird ($d(\_, \mathrm{im}(c'))$ stetig, $[p, q]$ kompakt). Sei $y \in [p, x_0]$ mit $d(y, y_0) = 2D$ (Falls

Abbildung 7:



$d(p, x_0) < 2D$, setze $y = p$). Sei $z \in [x_0, q]$ analog definiert. Seien $y', z' \in \mathrm{im}(c')$ mit $d(y, y') < D, d(z, z') < D$ und geodätische Segmente $[y, y']$, $[z', z]$ gewählt .
Betrachte den Pfad γ von y nach z über $[y, y']$, $c' : y' \rightsquigarrow z'$ und $[z', z]$.Da

$$d(y', z') \leq d(y', y) + d(y, z) + d(z, z') \leq D + 4D + D = 6D$$

gilt nach 3.10 iii):

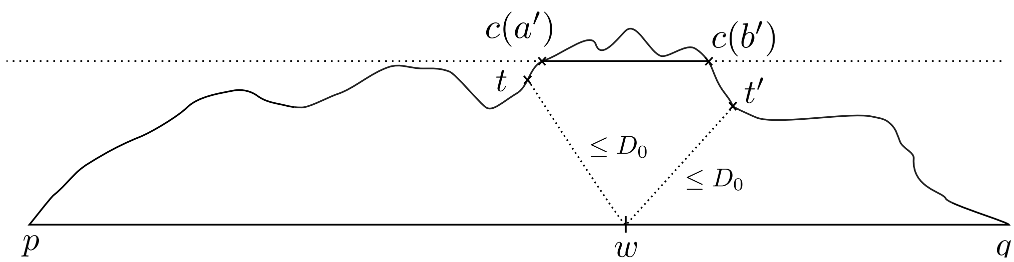
$$l(\gamma) \leq k_1 6D + k_2 + 2D$$

Damit folgt aus (3.4) mit $d(x_0, \mathrm{im}(\gamma)) = D$ (nach Konstruktion)

$$D - 1 \leq \delta(\log_2(6D + k_2 + 2D))$$

Damit erhält man (lineare Funktion durch log-Funktion in D abgeschätzt) eine obere Schranke D_0 für D, die nur von δ, λ, ϵ abhängt. Daher ist also $[p, q]$ in einer D_0-Umgebung von $\mathrm{im}(c')$ enthalten. Sei $R' := D_0(1+k_1)+k_2/2$. Wir zeigen nun, dass $\mathrm{im}(c') \subset U_{R'}([p, q])$: Sei $[a', b'] \subset [a, b]$ ein maximales Teilintervall, so dass $c'([a', b'])$ außerhalb von $U_{D_0}([p, q])$ liegt. $[p, q]$ ist zusammenhängend, $d(\_\,, \mathrm{im}(c'))$, $d(\_\,, c([a, a']))$, $d(\_\,, c[b', b])$ sind stetig

Abbildung 8:



$\Rightarrow$ Da $d(x, \mathrm{im}(c')) \leq D_0$ ist existieren $t \in [a, a']$, $t' \in [b', b]$, $w \in [p, q]$ mit $d(w, c'(t)) \leq D_0$ $d(w, c'(t')) \leq D_0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d(c'(t), c'(t')) \leq 2D_0 \\
&\Rightarrow l(c|_{[t,t']} \leq 2D_0 k_1 + k_2 && \text{(3.10 iii))} \\
&\Rightarrow \mathrm{im}(c') \subset U_R([p, q]) \\
&\Rightarrow R := R' + \lambda + \epsilon \text{ erfüllt das gewünschte für } c && \text{(3.10 iv))}
\end{aligned}$$

□

Definition 3.11. Sei X ein metrischer Raum, $k > 0$. Eine Kurve $c\colon [a, b] \to X$ heißt k-lokale Geodäte, falls $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ für alle $t, t' \in [a, b]$ mit $|t - t'| \leq k$

Theorem 3.12. *Sei X ein δ-hyperbolischer Raum und $c\colon [a, b] \to X$ eine k-lokale Geodäte, so dass $k > 8\delta$. Dann gilt:*

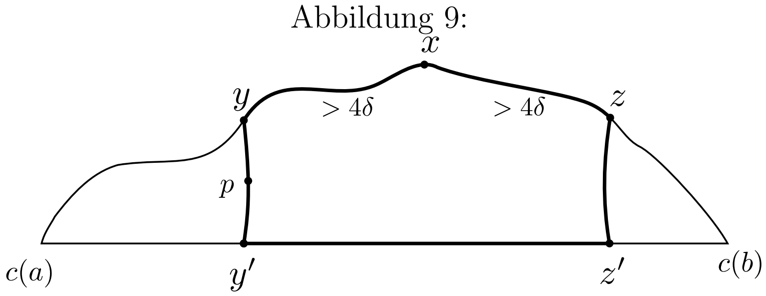
i) $\mathrm{im}(c)$ *ist enthalten in einer 2δ-Umgebung jedes geodätischen Segmentes* $[c(a), c(b)]$ *zwischen den Endpunkten von c.*

ii) $[c(a), c(b)]$ *ist enthalten in der 3δ-Umgebung von* $\mathrm{im}(c)$.

iii) c ist eine (λ, ϵ)-Quasi-Geodäte mit $\epsilon = 2\delta$, $\lambda = (k + 4\delta)/(k - 4\delta)$

Beweis: Wir benötigen im folgenden nur Aussage i). Sei dazu x ein Punkt auf $\mathrm{im}(c)$ mit maximalem Abstand zu $[c(a), c(b)]$. Wir nehmen an, dass $|a - t|, |b - t| > 4\delta$, die anderen Fälle gehen analog. Dann existiert ein Teilpfad von c mit Länge echt größer 8δ aber kleiner als k, zentriert um x. Seien y, z die Endpunkte des Pfades und y', z' die zu y bzw. z am nächsten liegenden Punkte auf $[c(a), c(b)]$. Betrachte ein zu den Punkte y, z, z', y' gehörendes geodätisches Viereck, wobei $[y, z]$, $[y', z']$ übereinstimmen sollen mit den gegeben Teilkurven von z um $[c(a), c(b)]$ ($|t_y - t_z| < k$, c k-lokal geodätisch). Durch

Abbildung 9:



einfügen einer geodätischen Diagonalen $[y', z]$ und unter Benutzung der δ-Hyperbolizität sieht man, dass es auf einer der Seiten $[y, y']$, $[y, z']$, $[z, z']$ einen Punkt p geben muss mit Abstand kleiner gleich 2δ von x. Angenommen $p \in [y, y']$ Dann gilt:

$$\begin{aligned}
d(x, y') - d(y, y') &\leq d(x, p) + d(p, y') - (d(y, p) + d(p, y')) \\
&= d(x, p) - d(y, p) \\
&\leq d(x, p) - (d(y, x) - d(x, p)) \\
&= 2d(x, p) - d(y, x) \\
&< 4\delta - 4\delta = 0
\end{aligned}$$

Damit $d(x, y') < d(y, y')$ im Widerspruch zur Wahl von x. Analog für $p \in [z, z']$. Damit erhält man also $p \in [y, z']$, also $d(x, [c(a), c(b)]) \leq 2\delta$
Für ii), iii) siehe [BrHae99] □

Korollar 3.13. *In einem δ-hyperbolischen Raum ist jede k-lokal-geodätische Schleife c mit $k > 8\delta$ konstant.*

Beweis: Nach dem Theorem ist $\mathrm{im}(c)$ enthalten in einer 2δ-Umgebung des Startpunktes u von c. Hat c Länge größer gleich 2δ, so ist dies nicht möglich, da c dann einen geodätischen Teilpfad der Länge 2δ besitzt der bei u beginnt und also die 2δ-Umgebung von u verlässt. Ist andererseits $l(c) < 2\delta$, so ist c eine geodätische Schleife, also konstant. □

Definition 3.14. Sei X ein metrischer Raum, $c\colon S^1 \to X$ eine rektifizierbare Schleife. Eine ϵ-Füllung (P, Φ) von c besteht aus einer Triangulierung (in einem gewissen Sinn, siehe dazu [BrHae99]) P von D^2 und einer nicht notwendig stetigen Abbildung $\Phi\colon D^2 \to X$, so dass $\Phi|_{S^1} = c$ und der Durchmesser des Bildes jeder Seite von P unter Φ ist $\leq \epsilon$. Bezeichne $|\Phi|$ die Anzahl der Seiten von P. Die ϵ-Fläche von c ist definiert durch

$$\mathrm{Area}_\epsilon := \min\{|\Phi| \mid \Phi \text{ ist } \epsilon\text{-Füllung von } c\}$$

Eine Funktion $f\colon [0, \infty \to [0, \infty[$ heißt isoperimetrische Schranke für X, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass jede rektifizierbare Schleife c in X eine ϵ-Füllung besitzt mit $\mathrm{Area}_\epsilon(c) \leq f(l(c))$.
Falls f linear (quadratisch, ...) ist, so sagt man, dass X eine lineare (quadratische, ...) isoperimetrische Ungleichung erfüllt.

Theorem 3.15. *Sei X ein geodätischer Raum.*

i) Ist X δ-hyperbolisch, so erhüllt X eine lineare isoperimetrische Ungleichung.

ii) Falls andererseits Konstanten $K, N > 0$ existieren mit $Area_N(c) \leq Kl(c) + K$ für jede stückweise geodätische Kurve c in X, so ist X δ-hyperbolisch (und δ hängt nur von K und N ab).

Beweis: Siehe [BrHae99] □

4 Hyperbolische Gruppen und Wortproblem

Definition 4.1 (Hyperbolisch)**.** Eine endlich erzeugte Gruppe heißt hyperbolisch, falls ihr Cayley-Graph zu einem endlichen Erzeugendensystem (und damit zu allen) hyperbolisch ist.

Beispiel 4.2.

i) Die Cayleygraphen freier Gruppen zu ihrere Basis sind Bäume, also hyperbolisch. Damit ist jede freie Gruppe hyperbolisch. Insbesondere ist also $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ hyperbolisch.

ii) $\mathbb{Z}^2$ ist nicht hyperbolisch, da der Cayleygraph zum Erzeugendensystem $\{(1,0), (0,1)\}$ quasi-isometrisch zu $\mathbb{E}^2$ist.

iii) Der Cayleygraph einer endlichen Gruppe ist beschränkt, also hyperbolisch.

Theorem 4.3 (Einige Eigenschaften hyperbolischer Gruppen)**.**

i) *Eine endlich erzeugte Gruppe ist genau dann hyperbolisch, wenn sie eigentlich, isometrisch und kokompakt auf einem eigentlichen hyperbolischen Raum X operiert.*

ii) *Eine Gruppe ist genau dann hyperbolisch, wenn sie eine endliche Dehn-Präsentation besitzt.*

iii) *Hyperbolische Gruppen sind endlich präsentiert*

iv) *Das Wort- und Konjugationsproblem ist für hyperbolische Gruppen lösbar.*

v) *Das Isomorphismusproblem ist lösbar für torsionsfreie hyperbolische Gruppen.*

vi) *Eine Torsionsgruppe ist genau dann hyperbolisch, wenn sie endlich ist.*

vii) *Jedes Element in einer hyperbolischen Gruppe besitzt nur endlich viele Konjugationsklassen.*

Beweis: i) Švarc-Milnor-Lemma [BrHae99, Proposition I8.19] ii), iii), iv) Vortrag + [BrHae99] v), vi), vii) [BrHae99] bzw. [Lück2] wo sich auch eine weitaus ausführlichere Liste mit Eingenschaften findet. □

Bem (Die drei Dehn-Probleme)**.** Sei Γ eine endlich erzeugte Gruppe.

1. Das Wortproblem: Ein Element der Gruppe sei als Wort in den Erzeugern gegeben. Man gebe ein Verfahren an, mit dem man nach endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob das Wort das neutrale Element in Γ ist oder nicht.

2. Das Konjugationsproblem: Seien zwei Elemente $S, T \in \Gamma$ als Wörter in den Erzeugern gegeben. Man gebe ein Verfahren an, das entscheidet ob S und T in γ konjugiert sind.

3. Das Isomorphismusproblem: Gegeben zwei endlich erzeugte Gruppen. Man entscheide, ob diese isomorph sind, oder allgemeiner ob eine angegeben Abbildung von den Erzeugern der einen Gruppe in die andere Gruppe einen Isomorphismus der Gruppen induziert.

Definition 4.4. Sei Γ eine Gruppe. Eine endliche Präsentation $\Gamma = < A \mid R >$ heißt Dehn-Präsentation, falls $R = \left\{u_1 v_1^{-1}, \ldots, u_n v_n^{-1}\right\}$ für Elemente $u_i, v_i \in F(A)$ für die gilt:

i) $u_i = v_i$ in Γ für alle i.

ii) Für die Länge der Wörter gilt $|v_i| < |u_i|$.

iii) Ist w ein Wort das das neutrale Element in Γ darstellt, so enthält w eines der u_i als Teilwort.

Bem. Besitzt eine Gruppe eine Dehn-Präsentation, so besitzt sie offensichtlich auch ein lösbares Wortproblem.

Theorem 4.5. *Eine Gruppe ist genau dann hyperbolisch, wenn sie eine endliche Dehn-Präsentation besitzt.*

Beweis: "$\Leftarrow$" Sei $\Gamma =< A \mid R >$ eine endliche Dehn-Präsentation und ρ die Länge des längsten Wortes in R. Betrachte eine Kantenschleife c (d.h. c ist eine Schleife und geodätisch auf den Kanten) der Länge n im Cayleygraphen $C_A(\Gamma)$. Sei w das zu c gehörige Wort. Der Dehn-Algorithmus liefert ein Teilwort u von w das nicht geodätisch ist und ein kürzeres Wort v mit $u = v$ in Γ und $|uv^{-1}| \leq \rho$. Sei c' die Kantenschliefe die entsteht, wenn man u in w durch v ersetzt. Eine Standard-ρ-Füllung von c' lässt sich fortsetzen zu einer Standard-ρ-Füllung von c, indem man eine weitere Seite hinzunimmt und diese geeignet in höchstens ρ Dreiecke von Umfang $\leq \rho$ zerlegt. Mit Induktion nach $n = l(c)$ erhält man eine Standard-ρ-Füllung von c' mit $\text{Area}_\rho(c') \leq \rho l(c')$ und kann diese fortsetzen zu einer Standard-ρ-Füllung von c mit $\text{Area}_\rho(c) \leq \rho l$. D.h. Γ erfüllt eine lineare-isoperimetrische Ungleichung, ist also hyperbolisch.

"$\Rightarrow$": Sei nun umgekehrt $C_A(\Gamma)$ δ-hyperbolisch für ein endliches Erzeugendensystem A. Sei $k > 8\delta$. Jede nicht konstante Kantenschleife c in Γ besitzt nach Kor.3.13 einen Unterpfad der Länge höchstens k der nicht geodätisch ist und dessen Enden Ecken sind (andernfalls wäre c k-geodätische Schleife, also konstant).
Ist nun $w = 1$ in Γ, so ist der zu w gehörende Pfad eine Kantenschleife und besitzt wie oben gesehen einen Teilpfad der nicht geodätisch ist und einem Wort u entspricht. Sei v das zu der Geodäte mit gleichen Endpunkten wie u gehörende Wort. Setze:

$$R = \left\{ uv^{-1} \mid |u| \leq k, v \text{ zu } u \text{ kürzestes Wort in } F(A) \text{ mit } u = v \right\}$$

Nach obigen Überlegungen ist dann $< A \mid R >$ eine Dehn-Präsentation. □

Korollar 4.6.

i) Jede hyperbolische Gruppe ist endlich präsentiert

ii) Besitzt eine Gruppe Γ bezüglich eines endlichen Erzeugendensystems eine Dehn-Darstellung so auch bezüglich jedes anderen endlichen Erzeugendensystems.

Lemma 4.7. *Sei X ein δ-hyperbolischer geodätischer Raum. Dann gibt es eine nur von δ abhängige Konstante C, so dass für jedes $(8\delta + 1)$-lokal-geodätische Viereck Q in X gilt, dass jede der vier Seiten in einer C-Umgebung der Vereinigung der anderen drei Seiten liegt.*

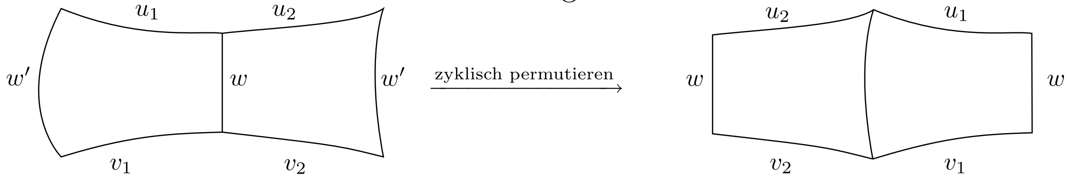
Beweis: Seien $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$ die vier Seiten des Vierecks, a, b, c, d jeweils Geodäten mit denselben Endpunkten wie die Seiten des Vierecks. $(8\delta+1)$-lokale Geodäten sind nach Theorem 3.12 $(\lambda(\delta), \epsilon(\delta))$-Quasi-Geodäten. Nach Theorem 3.6 existiert ein $R(\delta)$ mit $d(\tilde{a}, a) < R$, entsprechend für b, c, d. Wegen der δ-Hyperbolizität gilt außerdem $a \subset U_{2\delta}(b \cup c \cup d)$. Damit erhält man insgesamt: $\tilde{a} \subset U_{2\delta+2R}(\tilde{b} \cup \tilde{c} \cup \tilde{d})$. Mit $C := 2\delta + 2R$ folgt die Behauptung. □

Lemma 4.8. *Sei Γ eine Gruppe die δ-hyperbolisch ist bezüglich eines endlichen Erzeugendensystems A. Dann gibt es eine nur von δ abhängige Konstante K, so dass gilt: Sind $u, v \in F(A)$ in Γ konjugierte Wörter, so dass u, v und alle ihre zyklischen Permutationen (d.h. alle Wörter die aus u bzw. v durch zyklisches permutieren der Buchstaben aus A entstehen) $(8\delta + 1)$-lokal-geodätisch sind, so gilt:*

1. $\max\{|u|, |v|\} \leq K$ *oder*
2. *Es gibt ein Wort $w \in F(A)$ der Länge $\leq K$, so dass $w^{-1}u'w = v'$ in Γ für zyklische Permutationen u' und v' von u und v.*

Beweis: Sei C wie in obigem Lemma, $K := 2C+1$. Sei w ein beliebiges geodätisches Wort in $F(A)$ mit $wuw^{-1} = v$. Betrachte ein Viereck in $C_A(\Gamma)$ mit den Kanten w, u, w^{-1}, v^{-1}. Indem wir eventuell u und v durch zyklische Permutationen ersetzen können wir annehmen, dass jede Ecken der oberen Kante des Vierecks mindestens Abstand $|w|$ von jedem Punkt der unteren Seite hat.

Abbildung 10:



Falls $|w| \leq K$ so sind wir fertig, sei also $|w| > K$. Sei p der Mittelpunkt der oberen Seite (nicht notwendig ein Eckpunkt). w ist geodätisch, u, v^{-1} sind $(8\delta + 1)$-lokal-geodätisch, nach obigem Lemma existiert also zu p ein Punkt q auf einer der anderen drei Seiten des Vierecks mit $d(p, q) < C$. Wegen $C < K$ kann dieser Punkt nicht auf der unteren Seite liegen. Sei also ohne Einschränkung q auf der linken Seite. Sei x der obere, y der untere zu dieser Seite gehörende Endpunkt. Dann gilt: $|w| - 1/2 \leq d(p, y)$ (denn der Abstand jeder Ecke der oberen Seite ist mindestens $|w|$ zu y) und $d(p, y) \leq d(p, q) + d(q, y) = C + d(q, y)$ sowie $|w| = d(y, q) + d(q, x)$. Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned}(x, q) &= |w| - d(y, q)\\ &\leq d(p, y) + \frac{1}{2} - d(y, q)\\ &\leq d(q, y) + C - d(y, q) + \frac{1}{2} = C + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Wegen $|u|/2 = d(x, q)$ erhält man damit $|u| \leq 2C + 1 = K$. Analog $|v| \leq 2C + 1$ und damit die Beh. □

Theorem 4.9. *Jede hyperbolische Gruppe besitzt ein lösbares Konjugationsproblem.*

Beweis: Betrachte folgendes Verfahren: Seien u, v zwei Wörter in $F(A)$ die auf Konjugation überprüft werden sollen. Mittels Dehn-Algorithmus können wir überprüfen, ob ein Wort der Länge $\leq 8\delta+1$ geodätisch ist oder nicht (indem wir in einer entsprechenden Liste alle Paare überprüfen). Wir betrachten jetzt in u und v und ihren zyklischen Permutationen die Teilwörter der Länge $\leq 8\delta + 1$ und prüfen, ob diese geodätisch sind, andernfalls ersetzen wir sie mittels Dehn-Algorithmus durch geodätische Wörter. Damit haben wir nach höchstens $|u| + |v|$ Schritten den Fall erreicht, dass u, v und alle ihre zyklischen Permutationen $(8\delta + 1)$-lokal geodätisch sind, damit sind wir im Fall des obigen Lemmas. Betrachte die Mengen $\Omega_0 := \{w' \in F(A) \mid |w| \leq K\}$ aller Wörter der Länge $\leq K$ und Ω_1 die zu jedem Paar u', v' von konjugierten Wörtern der Länge $\leq K$ ein w enthält mit $wu'w^{-1} = v'$ und deren Vereinigung $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$. Dann ist Ω endlich und nach obigem Lemma genügt es jetzt, für u und v zu überprüfen, ob es ein $w \in \Omega$ gibt mit $wuw^{-1} = v$ in Γ. □

Der Vortrag stützt sich im Wesentlichen auf das hervorragende Buch [BrHae99]. Einen guten Überblick vermitteln auch die beiden Arbeiten von Herrn Prof. Lück, die beide auf seiner Homepage abgerufen werden können.

Literatur

[BrHae99] M.Bridson und A.Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer, 1999

[Lück1] Wolfgang Lück, *Hyperbolische Gruppen*, Vortrag im Oberseminar Topologie, 2003

[Lück2] Wolfgang Lück, Survey on geometric group theory, *Münster Journal of Mathematics* **1** (2008)